“TIQXMMI” MILLIY TADQIQOT UNIVERSITETI HUZURIDAGI FUNDAMENTAL VA AMALIY TADQIQOTLAR INSTITUTI HUZURIDAGI ILMIY DARAJALAR BERUVCHI
DSc.03/31.03.2022.T/FM.10.04 RAQAMLI ILMIY KENGASH

O’ZBEKISTON MILLIY UNIVERSITETI

MATRASULOV JASURBEK DAVRONBEK O’G’LI

PAST O’LCHAMLI SODDA KVANT TIZIMLARI VA STOXASTIK JARAYONLARNING BOSHQARILADIGAN ADIABATIK EVOLYUTSIYASINI MODELLASHTIRISH

05.01.07 – Matematik modellashtirish. Sonli usullar va dasturlar majmui (fizika-matematika fanlari)

FIZIKA-MATEMATIKA FANLARI BO’YICHA FALSAFA DOKTORI (PhD) DISSERTATSIYASI AVTOREFERATI

TOSHKENT – 2024

УДК: 530.182.1, 519.635.2

Fizika-matematika fanlari bo'yicha falsafa (PhD) doktori dissertatsiyasi avtoreferati mundarijasi
Оглавление автореферата диссертации доктора философии (PhD) по физико-математическим наукам
Contents of dissertation abstract of doctor of philosophy (PhD) on physical – mathematical sciences

“TIQXMMI” MILLIY TADQIQOT UNIVERSITETI HUZURIDAGI FUNDAMENTAL VA AMALIY TADQIQOTLAR INSTITUTI HUZURIDAGI ILMIY DARAJALAR BERUVCHI DSc.03/31.03.2022.T/FM.10.04 RAQAMLI ILMIY KENGASH

O’ZBEKISTON MILLIY UNIVERSITETI

MATRASULOV JASURBEK DAVRONBEK O’G’LI

PAST O’LCHAMLI SODDA KVANT TIZIMLARI VA STOXASTIK JARAYONLARNING BOSHQARILADIGAN ADIABATIK EVOLYUTSIYASINI MODELLASHTIRISH

05.01.07 – Matematik modellashtirish. Sonli usullar va dasturlar majmui (fizika-matematika fanlari)

FIZIKA-MATEMATIKA FANLARI BO’YICHA FALSAFA DOKTORI (PhD) DISSERTATSIYASI AVTOREFERATI

TOSHKENT – 2024

Falsafa doktori (PhD) dissertatsiyasi mavzusi O'zbekiston Respublikasi Vazirlar Mahkamasi huzuridagi Oliy attestatsiya komissiyasida B2023.2.PhD/FM860 raqam bilan ro'yxatga olingan.

Falsafa doktori dissertatsiyasi Mirzo Ulug'bek nomidagi O'zbekiston Milliy universitetida bajarilgan.

Dissertatsiya avtoreferati uch tilda (o'zbek, rus, ingliz (xulosa)) Ilmiy kengashning internet sahifasida (www.ifar.uz) va "Ziyonet" axborot-ta'lim portalida (www.ziyonet.uz) joylashtirilgan.

Ilmiy rahbar:	**Yusupov Jambul Ruslonovich** fizika-matematika fanlari doktori, professor
Rasmiy opponentlar:	
Yetakchi tashkilot:	**Samarqand Davlat universiteti**

Dissertatsiya himoyasi "TIQXMMI" Milliy tadqiqot universiteti huzurida Fundamental va amaliy tadqiqotlar instituti huzuridagi ilmiy darajalar beruvchi DSc.03/31.03.2022.T/FM.10.04 raqamli ilmiy kengashning 2023-yil «1» iyul soat 16^{00} dagi majlisida bo'lib o'tadi (Manzil: 100000, Toshkent shahri, Qori Niyoziy ko'chasi 39-uy, Fundamental va amaliy tadqiqotlar instituti, 108-katta majlislar zali; Tel.: +99871 237-09-61.; e-mail: info@ifar.uz).

Dissertatsiya bilan "TIQXMMI" Milliy tadqiqot universiteti huzuridagi fundamental va amaliy tadqiqotlar instituti Axborot-resurs markazida tanishish mumkin (8 raqami bilan ro'yxatga olingan). Manzil: 100000, Toshkent shahri, Qori Niyoziy ko'chasi, 39-uy, Fundamental va amaliy tadqiqotlar instituti, 108-katta majlislar zali; Tel.: +99871 237-09-61.

Dissertatsiya avtoreferati 2023-yil "19" iyun kuni tarqatildi.
(2023-yil «17» iyundagi 8 raqamli reestr bayonnomasi.)

B.J. Ahmedov
Ilmiy darajalar beruvchi Ilmiy kengash raisi, fizika-matematika fanlari doktori, professor

E.X. Karimbayev
Ilmiy darajalar beruvchi Ilmiy kengash ilmiy kotibi, fizika-matematika fanlari bo'yicha falsafa doktori (PhD)

B.M. Narzilloyev
Ilmiy darajalar beruvchi Ilmiy kengash qoshidagi Ilmiy seminar raisi, fizika-matematika fanlari doktori, yetakchi ilmiy xodim

KIRISH (falsafa doktori (PhD) dissertatsiyasi annotatsiyasi)

Tadqiqot ishining dolzarbligi va zarurati. So'nggi o'n yillikda butun dunyoda olib borilayotgan jadal ilmiy va amaliy tadqiqotlar zamonaviy kvant texnologiyalarining asosini tashkil etuvchi turli kvant materiallari va qurilmalarida qo'llash istiqboliga ega bo'lgan kvant jarayonlarini boshqarish va manipulyatsiya qilish usullarini ishlab chiqishga qaratilgan. Aynan shunday texnologiyalarni joriy etish orqali nano- va kvant texnologiyalardagi zamonaviy mexanik, elektron, optik, issiqlik va boshqa qurilmalarning resurs tejamkorligi va miniatyurizatsiyasida sezilarli yaxshilanishlar kutilmoqda. Bunday maqsadga erishish kvant jarayonlarining evolyutsiyasini boshqarish muammosini hal qilish imkonini beradigan va kvant rejimida sodir bo'ladigan fundamental jarayonlarning mexanizmlarini chuqur tushunishni talab qiladi. Va bu o'z navbatida, yuqorida qayd etilgan jarayonlarning kvant evolyutsiyasining fizika nuqtai nazaridan maqbul va samarali matematik modellarini ishlab chiqmasdan mumkin emas. Aynan shunday modellarni ishlab chiqish va ulardan foydalanish kvant materiallari va rivojlangan funksional qurilmalarni ishlab chiqish imkonini beradi. Kvant jarayonlarini boshqarishning samarali usullaridan biri yapon olimlari K. Nakamura va S. Masuda tomonidan ilgari surilgan kvant tizimining tezlashtirilgan (sekinlashtirilgan) evolyutsiyasi deb ataladigan algoritmdir.

Hozirgi kunda jahonda Shredinger tenglamalari bilan tavsiflangan kvant tizimining tezlashtirilgan (sekinlashtirilgan) evolyutsiyasini turli kontekstlarda va turli xil yondashuvlarda o'rganilmoqda. Shunday yo'nalishlardan biri adiabatikaga eng qisqa yo'l bo'lib, undagi maqsad sekin evolyutsiya bilan berilgan manzilga tezda erishishdir. So'nggi o'n yil ichida bir qator olimlar tomonidan past o'lchamli kvant tizimlarda adiabatik kvant dinamikasini boshqarishning turli xil versiyalari taklif qilingan. Ushbu nuqtai nazardan dinamik konfaynment orqali kvant evolyutsiyasining tezlashishini, Shredinger tenglamasida nostatsionar chegaraviy shartlarning parametrlarini manipulyatsiya qilish orqali amalga oshirish alohida qiziqish uyg'otadi. Bunday tizimlarda kvant tizimining evolyutsiyasini boshqarish uchun vosita sifatida konfaynment parametrlarini to'g'ri sozlash qo'llaniladi.

Mamlakatimizda ham nazariy fizika ham amaliy matematika nuqtai nazaridan past o'lchamli funksional materiallarni o'rganishda yuzaga keladigan turli kvant tizimlari va jarayonlarni modellashtirishga alohida e'tibor qaratilmoqda. Jumladan, bu yo'nalishda yuqori aniqlikdagi va stabil diskretlash usullaridan foydalanishni talab qiladigan turli potentsial va chegaraviy shartlar bilan berilgan nostatsionar kvant mexanik to'lqin tenglamalarining sonli yechimlari asosida matematik modellarni ishlab chiqish alohida o'rin tutadi. “Funksional analiz, algebra, differensial tenglamalar, matematik fizika, matematik modellashtirish, hisoblash matematikasi va diskret matematika, ehtimollar nazariyasi va matematik statistika” kabi ustuvor yo'nalishlar bo'yicha xalqaro standartlar darajasida ilmiy tadqiqotlar olib borish Respublika universitetlari va Akademik Tadqiqot Institutlarining ilmiy guruhlari, kafedralari va laboratoriyalari kabi bir qator tashkilotlarning usutvor vazifalaridan biridir. Rezolyutsiyaning bajarilishini ta'minlashda differensial tenglamalarni grafiklarda analitik va sonli yechish nazariyasini rivojlantirish muhim ahamiyatga ega.

Mazkur dissertasiya izlanishlari ma'lum darajada O’zbekiston Respublikasi Prezidentining 2017 yil 7 fevraldagi “O’zbekiston Respublikasini yanada rivojlantirish bo’yicha Harakatlar strategiyasi to’g’risida”gi PF-4947-sonli Farmonida, 2012 yil 21 martdagi “Zamonaviy axborot-kommunikasiya texnologiyalarini yanada joriy etish va rivojlantirish chora-tadbirlari to’g’risida”gi PQ-1730-sonli Qarori, 2010 yil 15 dekabrdagi “2011-2015 yillarda O’zbekiston Respublikasi sanoatini rivojlantirishning ustuvor yo’nalishlari to’g’risida”gi PQ-1442-sonli Qarori, 2017 yil 17 fevraldagi “Fanlar akademiyasi faoliyati, ilmiy-tadqiqot ishlarini tashkil etish, boshqarish va moliyalashtirishni yanada takomillashtirish chora-tadbirlari to’g’risida”gi PQ-2789-sonli Qarori va O’zbekiston Respublikasi Vazirlar Mahkamasining 2012 yil 1 fevraldagi “Joylarda komp'yuterlashtirish va axborot-kommunikasiya texnologiya-larini yanada rivojlantirish uchun shart-sharoitlar yaratish chora-tadbirlari to’g’risida”gi №24-sonli Qarorida, shuningdek, mazkur faoliyatga bag’ishlangan boshqa xuquqiy-me'yoriy hujjatlarda belgilangan vazifalarni amalga oshirishga xizmat qiladi.

Tadqiqotning respublika fan va texnologiyalari rivojlanishining ustuvor yo’nalishlariga mosligi. Mazkur tadqiqot ishi O’zbekiston Respublikasi fan va texnologiyalar rivojlanishining “Matematika, mexanika va informatika” ustuvor yo’nalishi doirasida bajarilgan.

Dissertatsiya tadqiqotining dissertatsiya bajarilgan oliy ta’lim yoki ilmiy-tadqiqot muassasasining ilmiy-tadqiqot ishlari rejalari bilan bog’liqligi. Dissertatsiya tadqiqoti REP-05032022/235 «Ultrafast phenomena and vacuum effects in relativistic artificial atoms created in graphene», F-2021-440 «Tarmoqlangan past o’lchamli sturkturalarda kvant transporti va kvazizarralar dinamikasi: Shaffof kvant tarmoqlarini modellashtirish va dizayn qilish» ilmiy-tadqiqot loyihalari doirasida O’zbekiston Milliy universitetining ilmiy-tadqiqot ishlari rejasi asosida amalga oshirildi.

Dissertatsiya mavzusi bo'yicha xorijiy ilmiy tadqiqotlar sharhi. Kvant tizimlari evolyutsiyasini nazorat qilish va kvant jarayonlarini tezlashtirish usullarini ishlab chiqishga qaratilgan ilmiy tadqiqotlar dunyoning yetakchi ilmiy markazlari va oliy o‘quv yurtlarida, jumladan Basklar davlati universiteti (Ispaniya), Lyuksemburg universiteti (Lyuksemburg), Ibroniy universiteti (Isroil), Nyukasl universiteti (Buyuk Britaniya), Bengkulu universiteti (Indoneziya), Merilend universiteti (AQSh), Maks Plank nomidagi murakkab tizimlar fizikasi instituti (Germaniya), O’zbekiston Milliy universiteti (O’zbekiston) kabi ilmiy tashkilotlarda olib borilmoqda.

Butun dunyoda kvant tizimlari evolyutsiyasini analitik va raqamli modellashtirish va past o'lchamli tizimlarning kvant dinamikasini boshqarish bo'yicha bir qator ustuvor yo'nalishlarda jadal ilmiy va amaliy tadqiqotlar olib borilmoqda, jumladan: kvant jarayonlarining evolyutsiyasini manipulyatsiya qilish usullarini ishlab chiqish, kvant evolyutsiyasini tezlashtirish yoki sekinlashtirish metodlarini ishlab chiqish, shuningdek kvant jarayonlarining boshqariladigan evolyutsiyasini modellashtirish uchun kvant tizimlarining bir qator xususiyatlarni o'rganish amalga oshirilmoqda.

Butun dunyoda past o'lchamli tizimlarda kvant evolyutsiyasini o'rganish, shuningdek, nostatsionar Shredinger tenglamasi yordamida tavsiflanadigan kvant tizimlari dinamikasini tezlashtirish yoki sekinlashtirish algoritmlari ishlab chiqish bo'yicha olib borilgan tadqiqotlar natijasida bir qator ilmiy yutuqlarga erishildi, jumladan: kvant evolyutsiyasini tezlashtirish yoki sekinlashtirishning matematik nazariyasining asoslari ishlab chiqildi, “fast-forward” algoritmiga (Osaka University) asoslangan kvant evolyutsiyasini boshqarishning bir qator samarali usullari taklif qilindi, “short cuts to quantum evolution” (University of the Basque Country) asosida kvant tizimlarining adiabatik evolyutsiyasini boshqarish metodlari ham o'rganildi, shuningdek, nostatsionar Dirak tenglamasi yordamida tavsiflanadigan relativistik tizimlaring kvant evolyutsiyasini tezlashtirish usuli ishlab chiqildi (University of Maryland), kvant tizimlarida adaibatik invariantlarni tezlashtirish usullari o‘rganildi (University of Maryland), kvant tizimlarida tunnel effektining dinamikasini boshqarish usuli ishlab chiqildi (O‘zbekiston Milliy universiteti), stoxastik issiqlik dvigatellarini manipulyatsiya qilish usullari tadqiq qilindi (O'zbekiston Milliy universiteti), spinlar dinamikasini boshqarish usuli ishlab chiqildi (Bengkulu universiteti).

Muammoning o’rganilganlik darajasi. Kvant tizimlar evolyutsiyasini manipulyatsiya qilish tushunchasi A. Emmanuilidu, M. Berri, S. Rays, M. Demirplak, K. Nakamura, S. Masuda va J. G. Muga asarlarida kiritilgan. Biroq, kvant adiabatik jarayonlar uchun kvant tizimlarining evolyutsiyasini manipulyatsiya qilish usullarini birinchi qo'llash K. Nakamura, S. Masuda, A. del Kampo, X. Chen ishlariga borib taqaladi. Keyinchalik Xi Chen, A. Ruschhaupt, S. Shmidt, A. del Campo, D. Guery-Odelin, J. G. Muga “shortcuts to adiabaticity” usuli yordamida atom sovutish modelini taqdim etdi. K. Nakamura, A. Xojaqulov, S. Masuda, S. Avazboyevlar an’anaviy va adiabatik rejimlarda kvant tunnellash jarayonini tezlashtirish usullarini taklif qildilar. S. Masuda, U. Gungordu, X. Chen, T. Ohmi, M. Nakaxara Bose-Eynshteyn kondensatlarida topologik girdoblar hosil bo‘lishini tezlashtirish yo‘llarini ishlab chiqdilar. Stoxastik issiqlik dvigatellarini tezlashtirish muammosi birinchi marta K. Nakamura, Y. Izumida tomonidan ko'rib chiqilgan. Tezlashtirilgan dinamik kvant tutilishining termodinamik xossalari K. Nakamura, G. Babajanova, A. del Kampo, J. Goold, M. Paternostro tomonidan o'rganilgan. Klassik adiabatik invariant uchun tezlanish sxemasi C. Jarzinski, S. Deffner, A. Patra, Y. Subasi tomonidan taklif qilingan. S. Deffner relyativistik kvant jarayonlari dinamikasini tezlashtirish muammosini ko'rib chiqdi. Spin dinamikasini tezlashtirish muammosini I. Setiawan, B. E. Gunara, S. Masuda, K. Nakamura ko'rib chiqdilar.

Tadqiqot ishining maqsadi. Ushbu dissertatsiyaning maqsadi kvant tizimlarining tezlashtirilgan va sekinlashtirilgan adiabatik evolyutsiyasini modellashtirish va taklif qilingan matematik modellarni kvant issiqlik dvigatellariga qo'llashdan iborat. Tadqiqotning yana bir maqsadi stoxastik tizimlarning boshqariladigan evolyutsiyasini modellashtirishdir.

Tadqiqot ishining vazifalari:

1. Kvant qutisidagi kvant gazlarining boshqariladigan adiabatik evolyutsiyasini modellashtirish;
2. Past o'lchamli kvant tizimlarining evolyutsiyasini tezlashtirish va sekinlashtirish shartlarini aniqlash;
3. Dinamik chegaralanishda tezlashtirilgan adiabatik kvant evolyutsiyasini modellashtirish;

4. Stoxastik issiqlik dvigatelining matematik modelini qurish;
5. Tarmoqlangan past o'lchamli tuzilmalarda Broun zarrasining dinamikasini modellashtirish;
6. Past o'lchamli tizimlarda kvant evolyutsiyasini tezlashtirish uchun adiabatik eng qisqa yo'lning (adibatiklikka qisqartmalar) matematik modelini qurish.

Tadqiqot ishining obyekti: past o'lchamli kvant tizimlari, dinamik chegaradagi kvant ideal gaz, stoxastik issiqlik dvigateli, tarmoqlangan strukturalardagi Broun zarrasi.

Tadqiqot ishining predmeti: kichik o'lchamli kvant sistemalarining evolyutsiyasini tezlashtirish va sekinlashtirish usullarini ishlab chiqish, dinamik konfaynmentda qaralyotgan tizimlarning adiabatik evolyutsiyasini boshqarish, stoxastik issiqlik mashinasi matematik modelini ishlab chiqish, tarmoqlangan kichik o'lchamli tizimlarda Broun zarrasining harakatini boshqarish.

Tadqiqot ishining usullari: ushbu dissertatsiyada Shredinger, issiqlik, Kramers va Fokker-Plank tenglamalarini analitik va sonli yechish usullari qo'llanildi.

Tadqiqot ishining ilmiy yangiligi quyidagilardan iborat:

Dinamik konfaynmentda past o'lchamli kvant tizimlarning evolyutsiyasini tezlashtirish (sekinlashtirish) usuli taklif etiladi;

Evolyutsiyani tezlashtirish jarayonini eksperimental ravishda amalga oshirish imkonini beruvchi "Tezlashtiruvchi potentsial" ning aniq ko'rinishi olindi;

Stoxastik issiqlik dvigatelining matematik modeli va uning ishlash jarayoni va evolyutsiyasini tezlashtirish orqali uning ishlashini boshqarish usuli taklif etiladi;

Past o'lchamli tarmoqlangan tizimlarda boshqariladigan Broun harakatining matematik modeli taklif etiladi;

Dinamik konfaynmentda past o'lchamli tizimlarning issiqlik uzatishni tezlashtirish usuli ishlab chiqilgan;

Dinamik konfaynmentdagi kvant ideal Fermi gazi uchun yangi holat tenglamalari olindi;

Tadqiqot ishining amaliy natijalari quyidagilardan iborat:

vaqtga bog'liq chegaraviy shartlar bilan berilgan nostatsionar Shredinger tenglamasi uchun boshlang'ich-chegaraviy masalalari va metrik graflardagi Fokker-Plank tenglamalari uchun chekli farqlar sxemalari berildi;

past o'lchamli kvant tizimlarining tezlashtirilgan evolyutsiyasini uchun Shredinger tenglamalasi va stoxastik issiqlik dvigatelining matematik modelini yaratish uchun Kramers tenglamasini raqamli va analitik yechish usullaridan foydalanilgan.

Tadqiqot ishining natijalarining ilmiy va amaliy ahamiyati. Ishda qo'llaniladigan yondashuv juda universal bo'lib, kvant evolyutsiyasini boshqarish nazariyasiga, shuningdek kvant ideal gaz fizikasiga hissa qo'shadi.

Olingan natijalarning amaliy ahamiyati ulardan issiqlik dvigatellarini klassik va kvant rejimlarida modellashtirish, past o'lchamli tizimlarning sodda kvant evolyutsiyani tezlashtirish va sekinlashtirish usullarini ishlab chiqish, shuningdek, past o’lchamli tarmoqlangan strukturalarda Broun zarrasining harakatini modellashtirishda foydalanish imkoniyatini beradi. Bu muammolarning barchasi kvant texnologiyalari va stoxastik dinamika bilan bevosita bog'liq.

Tadqiqot ishining asosiy natijalari:

1) Past o'lchamli tizimlarda adiabatik kvant evolyutsiyasini tezlashtirish usuli taklif qilindi;
2) Past o'lchamli tizimlarda amalga oshirilgan stoxastik issiqlik dvigatelining matematik modeli taklif etiladi;
3) Past o'lchamli tizimlarda diffuziyani boshqarish usuli taklif etiladi;
4) Metrik graflarda Fokker-Plank tenglamasining analitik yechimi olindi;
5) Past o’lchamli tarmoqlangan strukturalarda Broun harakatining modeli taklif qilindi.

Tadqiqot natijalarining amaliyotga joriy qilinishi. “Quantum gas in the fast forward scheme of adiabatically expanding cavities: Force and equation of state” ilmiy natijalariga asoslanib:

to’lqin funksiyasining analitik ifodasi quyidagi xorijiy ilmiy ishlarda (Philosophical Transactions of Royal Society A, Volume 380, 20210278, November 2022; Reviews of Modern Physics, Volume 91, 045001, October 2019; Physical Review A, Volume 99, 062116, June 2019; Physical Review E, Volume 102, 012129, July 2020; Applied Mathematics Letters, Volume 143, 108684, September 2023) kvant kuchi, kinetik energiya, ichki energiya kabi fizik kattaliklarning o’rtacha qiymatini hisoblash uchun qo’llanilgan. Ilmiy natijani qo'llash qattiq va yumshoq devorlarli dinamik konfaynmentdaki kvant ideal gazining qayta qurish modelini yaratishga imkon berdi;

“Fast-forward approach to stochastic heat engine” ilmiy natijalariga asoslanib:

Maqolada izotermik va adiabatik jarayonlarni tezlashtirish uchun olingan potentsial quyidagi xorijiy ilmiy ishlarda (Frontiers in Physics, 16-jild, 33202, dekabr 2021; Physical Review Letters, jild 128, 230603, 2022 yil iyun; Physical Review10 , 054108, 2022 yil noyabr; Statistik mexanika jurnali: nazariya va eksperiment, jild 2020, 093207, 2020 yil; Fizika sharhi E, 106-jild, 024105, avgust 2022; Fizika sharhi E16, 2022-yil avgust; Tadqiqotni ko'rish , 4-jild, 023157, 2022 yil may; The European Physical Journal Plus, jild 137, 1011, 2022 yil sentyabr; Physical Review E, 103-jild, 032146, 2021 yil mart; The European Physical Journal B, 2-jild 2021-jild; Fizikadagi taraqqiyot haqida, 86-jild, 035902, 2023 yil yanvar) stoxastik issiqlik dvigatelining termodinamik xususiyatlarini o'rganishda qo'llanilgan.

Tadqiqot ishi natijalari asosida ikkita “Моделирование случайных процессов с использованием уравнения Фоккера-Планка на метрических графах” (DGU 2022 2974, 05/23/2022) va “Программный комплекс для моделирования броуновского движения в сетях по методу Фоккера-Планка” (DGU 20237477, 18/10/2023) dasturiy mahsulot uchun O’zbekiston Respublikasi Adliya vazirligi huzuridagi Intellektual mulk agentligi tomonidan ro’yxatga olingan sertifikatlar olingan.

Tadqiqot natijalarini aprobatsiya qilish: tadqiqot natijalari 5 ta ilmiy-amaliy konferensiyalarda, jumladan 1 ta respublika va 4 ta xalqaro konferensiyalarda, shuningdek, Dyusseldorf universitetining Nazariy fizika institutida va Anqara universiteti fizika fakultetida o'tkazilgan ilmiy seminarlarda sinovdan o'tkazildi.

Tadqiqot natijalarining chop etilganligi: tadqiqot natijalari bo'yicha xalqaro jurnallarda 5 ta ilmiy maqola chop etilgan, bulardan 4 tasi SCOPUS ma'lumotlar bazasiga kiradi va 4 ta konferensiya tezislari chop etilgan.

Dissertatsiyaning tuzilishi va hajmi. Dissertatsiyaning tuzilishi kirish, to'rt bob, xulosa, foydalanilgan adabiyotlar ro'yxati va ilovalardan iborat. Dissertatsiya hajmi 110 bet.

DISSERTATSIYANING ASOSIY QISMI

Kirishda O'zbekiston Respublikasi fan va texnikasini rivojlantirishning ustuvor yo'nalishlarini tadqiq qilishdan kelib chiqqan holda dissertatsiya mavzusining dolzarbligi va talabi asoslanadi, maqsad va vazifalari, shuningdek tadqiqot ob'ekti va predmeti shakllantiriladi, tadqiqotning ilmiy yangiligi va amaliy natijalari taqdim qilinadi, olingan natijalarning ishonchliligini asoslanadi, olingan natijalarning nazariy va amaliy ahamiyatini ochib beriladi, tadqiqot natijalarini amaliyotga tatbiqi ro'yxati, chop etilgan ishlar to'g'risidagi ma'lumotlar va dissertatsiya ishining tuzilishi keltirildi.

"Kvant tizimlari evolyutsiyasini tezlashtirish va sekinlashtirish usullari" deb nomlangan birinchi bobda kvant evolyutsiyasini boshqarish muammosining hozirgi holati, dissertatsiya vazifalarining dolzarbli tavsifi keltirilgan, shuningdek Shredinger tenglamasi doirasida kvant evolyutsiyasini tezlashtirish va sekinlashtirish nazariyasi, xususan, "fast forward" algoritmi batafsil taqdim etildi.

"**adiabatik ravishda kengayib borayotgan nano o'lchamli bo'shliqdagi kvant gazining tezlashtirilgan evolyutsiyasi**" deb nomlangan ikkinchi bob dinamik konfaynmentdagi ideal gazning tezlashtirilgan kvant evolyutsiyasini modellashtirishga bag'ishlangan. Unda, xususan, vaqt bo'yicha adiabatik o'zgaruvchan kvant tizimining evolyutsiyasini tezlashtirish algoritmi taklif etiladi.

Xususan, silindrsimon bo'shliqda joylashgan ideal gazning klapan bilan harakatlanuvchi adiabatik kvant evolyutsiyasini tezlashtirish sxemasi (usuli) taklif etilgan. Bir o'lchamli tizimda dinamik konfaynment vaqtga bog'liq bo'lmagan Schredinger tenglamasi bilan tavsiflanuvchi statsionar (lahzali) ψ_0 kvant holatini hosil qiluvchi va sekin o'zgaruvchan (vaqt bo'yicha) V_0 potentsial tomonidan yaratilgan deb faraz qilamiz. Umumiy holatda, ya'ni uzoq vaqt davomida tizimning evolyutsiyasi nostatsionar Shredinger tenglamasi yordamida tavsiflanadi.

Ushbu yondashuv doirasida biz asta-sekin o'zgaruvchan potentsial tomonidan yaratilgan "deformatsiyalanuvchi" tuzoqda joylashgan kvant tizimini ko'rib chiqamiz, bu yerda deformatsiya $R(t)$ potentsial parametrining o'zgarishi natijasida yuzaga keladi, uning adiabatik evolyutsiyasi munosabat yordamida belgilanadi:

$$R(t) = R_0 + \epsilon t,$$

bunda $\epsilon \ll 1$, o'sish koeffitsiyenti va uning kichikligi tufayli $R(t)$ ning sezilarli o'zgarishini kuzatish uchun yetarlicha uzoq vaqt $T = O\left(\frac{1}{\epsilon}\right)$ talab qilinadi. Bunday kvant tizimining evolyutsiyasi quyidagicha berilgan, statsionar bo'lmagan bir o'lchamli Shredinger tenglamasi yordamida tavsiflanadi:

$$i\hbar \frac{\partial \psi_0}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m} \partial_x^2 \psi_0 + V_0(x, R(t))\psi_0,$$

bu yerda tashqi elektromagnit maydon bilan o'zaro ta'sir yo'q deb taxmin qilinadi. Keyin statsionar tizimga tegishli bog'langan holatlar quyidagicha berilgan Shredinger tenglamasi yordamida tavsiflanadi:

$$E\phi_0 = \hat{H}_0\, \phi_0 \equiv \left[-\frac{\hbar^2}{2m}\partial_x^2 + V_0(x, R)\right]\phi_0.$$

Shuningdek, biz quyidagi ifoda orqali berilgan muntazamlashtirilgan kvant holatini kiritamiz

$$\begin{aligned} \psi_0^{reg} &\equiv \phi_0(x, R(t)) e^{i\epsilon\theta(x, R(t))} e^{-\frac{i}{\hbar}\int_0^t E(R(t'))dt'} \\ &\equiv \phi_0^{reg}\big(x, R(t)\big) e^{-\frac{i}{\hbar}\int_0^t E\left(R(t')\right)dt'}. \end{aligned}$$

Va shunga mos ravishda belgilangan potentsial

$$V_0^{reg} \equiv V_0(x, R(t)) + \epsilon\, \tilde{V}\,(x, R(t)).$$

Bunda θ va $\tilde{V}$ noma'lum hadlar ψ_0^{reg} quyidagi nostatsionar Schredinger tenglamasini qanoatlantirishi orqali ϵ aniqlikda topilishi mumkin:

$$i\hbar \frac{\partial \psi_0^{reg}}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m}\partial_x^2 \psi_0^{reg} + V_0^{reg}\psi_0^{reg}.$$

$\phi_0(x, R(t))$ funksiyani в виде, $\overline{\phi}_0(x, R(t))$ real amplituda va $\eta(x, R(t))$ fazalar orqali quyidagicha yozib olib

$$\phi_0\big(x, R(t)\big) = \overline{\phi}_0\big(x, R(t)\big) e^{i\eta(x, R(t))},$$

θ va $\tilde{V}$ lar uchun ushbu ifodalarni olamiz:

$$\partial_x(\overline{\phi}_0^2 \partial_x \theta) = -\frac{m}{\hbar}\partial_R \overline{\phi}_0^2,$$

$$\frac{\tilde{V}}{\hbar} = -\partial_R \eta - \frac{\hbar}{m}\partial_x \eta \cdot \partial_x \theta.$$

Yuqoridagi so'nggi ikkita ifodadan birinchisini x integrallab, navbdatdagi ifodani olamiz:

$$\partial_x \theta = -\frac{m}{\hbar}\frac{1}{\overline{\phi}_0^2}\int^x \partial_R\, \overline{\phi}_0^2 dx'.$$

Bizning vazifamiz tashqi elektromagnit maydon ta'sirida ψ_0^{reg} kvant holatining adiabatik dinamikasi evolyutsiyasini tezlashtirishdir, buning uchun biz ushbu holatning tezlashtirilgan versiyasini navbatdagi shaklda kiritamiz.

$$\psi_{FF}^{(0)}(x,t) = \psi_0^{reg}\left(x, R\big(\Lambda(t)\big)\right) = \phi_0^{reg}(x, R(\Lambda(t)))e^{-\frac{i}{\hbar}\int_0^t E(R(\Lambda(t')))dt\prime}$$

Bu yerda

$$R(\Lambda(t)) = R_0 + \epsilon\Lambda(t),$$

$\Lambda(t)$ esa ushbu ko'rinishda ifodalanadi

$$\Lambda(t) = \int_0^t \alpha(t')\ dt',$$

Bu yerda $\alpha(t)$ – vaqt shkalasini oshirish omili, u $\alpha(0) = 1$, $\alpha(t) > 1$ $(0 \le t \le T_{FF})$, $\alpha(t) = 1$ $(t > T_{FF})$ ko'rinishda aniqlangan. T bu $R(t)$ sezirarli o'zgarishga olib keluvchi juda uzoq vaq deb hisoblab, uning T_{FF} ga bog'liqligini shu ko'rinishda yozib olamiz:

$$T = \int_0^{T_{FF}} \alpha\,(t)\mathrm{d}t.$$

Ushbu vaqt oralig'ida $(0 \le t \le T_{FF})$, tezlashtirilgan $\alpha(t)$ ning aniq ifodasi quyidagicha yozilishi mumkin:

$$\alpha(t) = \overline{\alpha} - (\overline{\alpha} - 1)\cos(\frac{2\pi}{T/\overline{\alpha}}t),$$

bu yerda $\overline{\alpha}$ –bu $\alpha(t)$ ning o'rtacha qiymayi, v bu $\overline{\alpha} = T/T_{FF}$ ko'rinishda aniqlanadi. Biz $\psi_{FF}^{(0)}$ to'lqin funksiyani, $A_{FF}^{(0)}(x,t)$ va $V_{FF}^{(0)}(x,t)$ maydon potensiallarida zaryadlangan zarra uchun Shredinger tenglamasining yechimi deb tasavvur qilamiz:

$$\imath\hbar\frac{\partial\psi_{FF}^{(0)}}{\partial t} = H_{FF}\psi_{FF}^{(0)} \equiv$$
$$\left(\frac{1}{2m}(\frac{\hbar}{i}\partial_x - A_{FF}^{(0)})^2 + V_{FF}^{(0)} + V_0^{reg}\right)\psi_{FF}^{(0)},$$

bu yerda qulaylik uchun biz birlik zaryad $(q = 1)$ va birlik yorug'lik tezliklaridan $(c = 1)$ foydalanamiz. Shundan so'ng elektr maydonini quyidagicha yozib olamiz:

$$E_{FF} = -\frac{\partial A_{FF}^{(0)}}{\partial t} - \partial_x V_{FF}^{(0)}.$$

Bu o'z navbatida ϕ_0^{reg} to'lqin funksiya uchun quyidagi Shredinger tenglamasiga olib keladi:

$$i\hbar\frac{\partial\phi_0^{reg}}{\partial t} = \frac{1}{2m}\left(\frac{\hbar}{i}\partial_x - A_{FF}^{(0)}\right)^2 \phi_0^{reg} + (V_{FF}^{(0)} + V_0^{reg} - E)\phi_0^{reg},$$

bu yerda $V_0^{reg} \equiv V^{reg}(x, R(\Lambda(t)))$

ϕ_0^{reg} funksiyani $\overline{\phi}_0$ amplituda va $\eta + \epsilon\theta$ faza oqali quyidagicha yozib olib

$$\phi_0^{reg} \equiv \overline{\phi}_0(x, R(\Lambda(t)))e^{i[\eta(x,R(\Lambda(t)))+\epsilon\theta(x,R(\Lambda(t)))]},$$

$\psi_{FF}^{(0)}$ to'lqin funksiyasi uchun navbatdagi ifodani olamiz:

$$\psi_{FF}^{(0)} = \overline{\phi}_0(x, R(\Lambda(t)))e^{i\eta(x,R(\Lambda(t)))}e^{-\frac{i}{\hbar}\int_0^t E(R(\Lambda(t\prime)))dt\prime}.$$

Yuqorida olingan natijalar, masalan, harakatlanuvchi devorga ega bo'lgan bir o'lchovli kvant qutisidagi kvant zarrasining evolyutsiyasini tezlashtirish uchun qo'llanilishi mumkin. Bunday tizimning modeli quyidagi statsionar bo'lmagan Shredinger tenglamasi yordamida tavsiflanadi:

$$i\hbar\frac{\partial\psi}{\partial t} = H_0\psi = -\frac{\hbar^2}{2m}\partial_x^2\psi$$

bu yerda to'lqin funksiyasi quyidagicha berilgan chegaraviy shartlarni qanoatlantiradi $\psi(x = 0, t) = 0$ va $\psi(x = L(t), t) = 0$. Devorning holatidagi o'zgarishni adiabatik deb hisoblaymiz, ya'ni $L(t) = L_0 + \epsilon t$, bu yerda $\epsilon -$ kichik kattalik.

Bunday adiabatik kvant tizimining xos qiymatlari va xos funksiyalari quyidagi ko'rinishga ega:

$$E_n = \frac{\hbar^2}{2m}\left(\frac{\pi n}{L}\right)^2,$$

$$\phi_n = \sqrt{\frac{2}{L}}\sin\left(\frac{\pi n}{L}x\right).$$

Yuqorida ko'rsatib o'tilgan amallarga ko'ra, biz muntazamlashtirilgan bosqichning fazasini quyidagicha aniqlashtirib olamiz:

$$\partial_x\theta = -\frac{m}{\hbar}\frac{1}{\phi_n^2}\partial_L\int_0^x \phi_n^2\,\mathrm{d}x = \frac{m}{\hbar}\frac{x}{L},$$

$$\theta = \frac{m}{2\hbar}\frac{x^2}{L}.$$

Kvant tizimning adiabatik evolyutsiyasini tezlashtirish uchun yuqorida keltirilgan algoritmni qo'llash tezlashtirilgan tizimning to'lqin funksiyasi uchun quyidagi natijani beradi:

$$\psi_{FF} = \phi_n(x, L(\Lambda(t)))e^{i\frac{m\dot{L}}{2\hbar L}x^2}e^{-i\frac{\hbar}{2m}(\pi n)^2\int_0^t \frac{dt'}{L^2(\Lambda(t'))}},$$

Bu yerda $L(\Lambda(t)) = L_0 + \int_0^t v(t')dt'$, va $v(t) = \overline{v}\left(1 - \cos\frac{2\pi}{T_{FF}}t\right)$. Evolyutsiyaga tezlashtirilgan tizim potentsiali uchun, ya'ni tezlashtiruvchi potentsial uchun quyidagi ifodani olamiz:

$$V_{FF} = -\frac{m}{2}\frac{\ddot{L}}{L}x^2,$$

bu avvalgi tadqiqotlar natijalariga mos keladi.

"Stoxastik issiqlik dvigatelining tezlashtirilgan evolyutsiyasi" deb nomlangan uchinchi bobda Karno printsipi asosida ishlaydigan stoxastik dvigatelning boshqariladigan faoliyati modeli taklif etiladi. Bunday issiqlik dvigatelning misoli sifatida, masalan, so'nggi o'n yil ichida katta qiziqish uyg'otgan Broun issiqlik dvigatellarini olish mumkin. Ushbu ishda biz garmonik potentsial bilan o'zaro ta'sir qiluvchi va yuqori (T_h)- va past (T_c)- haroratli ikkita termal rezervuar orasida ishlaydigan Broun zarrasidan iborat stoxastik issiqlik dvigatelida izotermik jarayonning evolyutsiyasini tezlashtirish modelini taklif qildik.

Ushbu modelda $k_BT(=\frac{1}{\beta})$ haroratga ega rezervuar bilan aloqada bo’lgan va kengayuvchi (siqiluvchi) garmonik potentsial (ya’ni, kengligi vaqt o’zgarishi bilan o’zgarib turadigan parabolik o’ra bilan) bilan o’zaro ta’sir qiluvchi Broun zarrasini ko’rib chiqilgan. Bunday tizimning $\rho_0(x, p, t)$ taqsimot funksiyasi

$$\frac{\partial\rho_0}{\partial t} + \frac{\partial J_x}{\partial x} + \frac{\partial J_p}{\partial p} = 0 \qquad (1)$$

Bu yerda (J_x,J_p) quyidagicha aniqlangan ehtimolliklar oqimi

$$J_x = (\frac{\partial H_0}{\partial p} + \frac{1}{\beta}\frac{\partial}{\partial p})\rho_0,$$

$$J_p = -(\frac{\partial H_0}{\partial x} + \frac{1}{\beta}\frac{\partial}{\partial x})\rho_0$$

$$-\gamma(\frac{\partial H_0}{\partial p} + \frac{1}{\beta}\frac{\partial}{\partial p})\rho_0. \qquad (2)$$

Bu yerda $H_0 = \frac{p^2}{2} + \frac{1}{2}\lambda x^2$ –parabolik tuzoqdagi Broun zarrasi Gamiltoniani, λ – bikirlik koeffitsiyenti, va γ- ishqalanish koeffitsiyenti. Oxirgi ikkita ifodadan foydalanib, Kramers tenglamasini quyidagicha yozib olish mumkin

$$\frac{\partial\rho_0}{\partial t} = \{H_0, \rho_0\}$$

$$+\gamma\,\partial_p(\frac{\partial H_0}{\partial p}\rho_0 + \frac{1}{\beta}\partial_p\rho_0), \quad (3)$$

Bu yerda $\{\cdots,\cdots\}$ – Puasson qavslari (3) tenglamaning oxirgi hadi $\frac{\gamma}{\beta}$ ga proportsionaldir va Lanjevin tenglamasida paydo bo'ladigan Gauss (oq) shovqini bilan bog'liq. Bikrlik koeffitsiyenti $\lambda = const.$ bo'lgan hol uchun, qaralyotgan tizimning taqsimot funksiyasi ρ_0^{eq} Gauss ko'rinishga ega bo'ladi. Statsionar hol uchun $\partial_t\rho_0 = 0$ Kramers tenglamasi quyidagi yechimga ega bo'ladi

$$\rho_0^{eq} = \frac{\beta\sqrt{\lambda}}{2\pi}\exp(-\beta H_0(\lambda)), \quad (4)$$

va quyidagi normirovka shartini qanoatlantiradi, $\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\rho_0^{eq}(x,p)dxdp = 1.$

λ vaqt bo'yicha sekin o'zgaradigan holni, ya'ni kvazistatik holni ko'rib chiqamiz:

$$\lambda(t) \equiv \lambda_0 + \varepsilon t \quad (5)$$

Bu yerda $|\varepsilon| \ll 1$, va bu $\lambda(t)$ ning sezilarli o'zgarishini kuzatish uchun juda uzoq vaq $T = O(\frac{1}{|\varepsilon|})$, talab qiladi.

Dastavval biz quyidagi ko'rinishda, muntazamlashtirilgan taqsimot funksiyasini $\rho_0^{reg}(x,p;\lambda(t))$, kiritib olamiz

$$\rho_0^{reg} = \exp[-\beta H_0(\lambda(t)) - \Gamma(\lambda(t))] \quad (6)$$

va bu yerda

$$H_0(\lambda(t)) \equiv \frac{p^2}{2} + \frac{\lambda(t)}{2}x^2,$$

$$\exp(-\Gamma(\lambda(t))) \equiv \frac{\beta\sqrt{\lambda(t)}}{2\pi}. \quad (7)$$

H_0 ga potentsial εh ni qo'shish orqali biz Kramers tenglamasining muntazamlashtirilgan versiyasini olishimiz mumkin:

$$\frac{\partial\rho_0^{reg}}{\partial t} = \{H_0 + \varepsilon h, \rho_0^{reg}\}$$

$$+\gamma\,\partial_p(p\rho_0^{reg} + \frac{1}{\beta}\partial_p\rho_0^{reg})$$

$$+\varepsilon\gamma\,\partial_p(\rho_0^{reg}\frac{\partial h}{\partial p}). \quad (8)$$

Muntazamlashtirilgan taqsimot funksiyasi ρ_0^{reg} ushbu ifodani qanoatlanitirishini

$$\partial_t\rho_0^{reg} = \frac{\partial\rho_0^{reg}}{\partial\lambda}\frac{d\lambda}{dt}$$

$$= \varepsilon[-\frac{\beta}{2}x^2 + \frac{1}{2\lambda}]\rho_0^{reg}, \qquad (9)$$

va (8) ikki tarafini tenglashtirib quyidagi ifodalarni olamiz

$$\{H_0, \rho_0^{reg}\} + \gamma\,\partial_p(p\rho_0^{reg} + \frac{1}{\beta}\partial_p\rho_0^{reg}) = 0, \qquad (10)$$

$$[-\frac{\beta}{2}x^2 + \frac{1}{2\lambda}]\rho_0^{reg} = \{h, \rho_0^{reg}\}$$

$$+\gamma\,\partial_p\big(\rho_0^{reg}\,\partial_p h\big). \qquad (11)$$

Quyidagi munosabatni hisobga olib $\partial_p\rho_0^{reg} = -\beta p\rho_0^{reg}$ и $\partial_x\rho_0^{reg} = -\beta\lambda x\rho_0^{reg}$, (11) tenglamani ushbu ko'rinishda yozib olamiz

$$-\frac{\beta}{2}x^2 + \frac{1}{2\lambda} = +\beta[\lambda x\,\partial_p h - p\,\partial_x h]$$

$$-\gamma\beta p\,\partial_p h + \gamma\,\partial_{pp}h. \qquad (12)$$

(12) tenglamaning yechimi quyidagi ko'rinishda faraz qilamiz

$$h = ap^2 + bpx + cx^2. \qquad (13)$$

Buning natijasida biz algebraik tenglamar sistemasiga kelamiz:

$$b + 2\gamma a = 0,$$

$$\lambda b = -\frac{1}{2},$$

$$2\lambda a - 2c - \gamma b = 0,$$

$$\frac{1}{2\lambda} - 2\gamma a = 0. \qquad (14)$$

Ushbu sistemaning yechimlari quyidagi ko'rinishda bo'ladi $a = \frac{1}{4\gamma\lambda}$, $b = -\frac{1}{2\lambda}$, и $c = \frac{1}{4}(\frac{1}{\gamma} + \frac{\gamma}{\lambda})$. Bundan biz h uchun quyidagi ifodani olamiz

$$h = \frac{1}{4\gamma\lambda}p^2 - \frac{1}{2\lambda}px + (\frac{1}{4\gamma} + \frac{\gamma}{4\lambda})x^2. \qquad (15)$$

Yuqorida olingan natija ε dagi birinchi yaqinlashuvga tegishli ekanligi, ya'ni u ikkinchi tartib ε^2 ni hisobga olmasligiga e'tibor beramiz.

Bizning vazifamiz (9) tenglama orqali tavsiflanadigan tizimning evolyutsiyasini tezlashtirishdan iborat. Одним из эффективных способов решение подобной задачи является замена переменной времени, (t) функцией $\Lambda(t)$, который является «ускоренным» временем. Вводя фактор масштабирования $\alpha(t) \gg 1$ функцию $(\Lambda(t))$ можем определить как

$$\Lambda(t) = \int_0^t \alpha(t')dt'. \tag{16}$$

Tezlanish oraliqi $(0 \leq t \leq T_{FF})$ bo'lganda, $\alpha(t)$ funksiyani quyidagi ko'rinishda yozib olamuz $\alpha(t) = 1 + (\bar{\alpha} - 1)f(s)$, bu yerda $s \equiv \frac{t}{T_{FF}}$. $\bar{\alpha}(> 1)$. Bu yerda $f(s)(\geq 0)$ funksiya, $f(0) = f(1) = \dot{f}(0) = \dot{f}(1) = 0$ ko'rinishda berilgan chegaraviy shartlarni va $\bar{f} = \int_0^1 f(s')ds' = 1$ normirovka shartini qanoatlantiradi deb hisoblab, quyidagi ifodani olamiz

$$\alpha(t) = \bar{\alpha} - (\bar{\alpha} - 1)\cos(\frac{2\pi}{T_{FF}}t). \tag{17}$$

So'ngra, λ bikirlik koeffitsiyentiining vaqtga bog'liqligini quyidagicha faraz qilamiz

$$\lambda(\Lambda(t)) = \lambda_0 + \varepsilon\Lambda(t). \tag{18}$$

Shunda ρ_{FF} tezlashtirilgan tizim taqsimot funksiyasi quyidagi ko'rinishda ifodalanishi mumkin

$$\rho_{FF}(x,p,t) \equiv \rho_0^{reg}(x,p;\lambda(\Lambda(t)))$$
$$= \exp[-\beta H_0(\lambda(\Lambda(t))) - \Gamma(\lambda(\Lambda(t)))].$$ “{?|LL ny89(19)

Bu ρ_{FF} taqsimot funksiyasi tezlashtirilgan tizimning vaqt bo'yicha evolyutsiyasini tavsiflovchi quyidagi Kramers tenglamasini qanoatlantiradi:

$$\frac{\partial\rho_{FF}}{\partial t} = \frac{\partial\lambda}{\partial t}\frac{\partial\rho_{FF}}{\partial\lambda} = \varepsilon\alpha\frac{\partial\rho_{FF}}{\partial\lambda}$$
$$= \varepsilon\alpha\{h, \rho_0^{reg}\} + \gamma\varepsilon\alpha\,\partial_p(\rho_0^{reg}\,\partial_p h),$$

Kramers tenglamasini quyidagi chegarada $\lim_{\varepsilon\to 0,\bar{\alpha}\to\infty}\varepsilon\bar{\alpha} = \bar{v}$, bu yerda $\bar{v} > 0$ $(\bar{v} < 0)$ va $\varepsilon \to +0$ $(\varepsilon \to -0)$, navbatdagi ko'rinishda yozib olish mumkin:

$$\frac{\partial\rho_{FF}}{\partial t} = \{H_0 + v(t)h, \rho_{FF}\}$$
$$+\gamma\,\partial_p(p\rho_{FF} + \frac{1}{\beta}\partial_p\rho_{FF})$$
$$+\gamma\,\partial_p(\rho_{FF}\frac{\partial(v(t)h)}{\partial p}). \tag{20}$$

Bu yerda $v(t)$ tezlik va u $\alpha(t)$ funksiyasi orqali shunday ifodalanadi:

$$v(t) = \lim_{\varepsilon\to 0,\bar{\alpha}\to\infty} \varepsilon\alpha(t) = \bar{v}\left(1-\cos\left(\frac{2\pi}{T_{FF}}t\right)\right). \tag{21}$$

Shunday ekan, $0 \le t \le T_{FF}$ oraliqda, bikrlik koeffitsiyentii uchun quyidagi ifodani olamiz:

$$\lambda(\Lambda(t)) = \lambda_0 + \lim_{\varepsilon\to 0,\bar{\alpha}\to\infty} \varepsilon\Lambda(t) = \lambda_0 + \int_0^t v(t')dt'$$

$$= \lambda_0 + \bar{v}T_{FF}\left[\frac{t}{T_{FF}} - \frac{1}{2\pi}\sin\left(\frac{2\pi}{T_{FF}}t\right)\right].$$

Navbatdagi munosabat

$$\lambda(0) = \lambda_0, \quad \lambda(T_{FF}) = \lambda_0 + \bar{v}T_{FF} \tag{22}$$

va ushbu ifodani hisobga olib

$$\dot{\lambda}(0) = \dot{\lambda}(T_{FF}) = 0, \tag{23}$$

Tezlashtirilgan tizim Gamiltoniani uchun ushbu ifodaga kelamiz:

$$H_{FF}(x,p,t) = H_0 + \dot{\lambda}h, \tag{24}$$

Yuqorida (24) tenglamada berilgan Gamiltonian va (19) tenglamada berilgan taqsimot funksiyasi yordamida stoxastik issiqlik dvigatelining ish W, issiqlik miqdori Q va ichki energiya E kabi termodinamik kattaliklarini hisoblay olamiz. Ishning o’rtacha qiymati navbatdagi ifoda orqali aniqlanadi

$$W = \int_0^{T_{FF}} dt\langle\frac{\partial H_{FF}}{\partial t}\rangle. \tag{25}$$

Quyidagi munosabatni hisobga olib

$$\langle\frac{\partial H_{FF}}{\partial t}\rangle = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\partial H_{FF}}{\partial t}\rho_{FF}dxdp$$

$$= (\frac{\dot{\lambda}}{2} - \frac{\gamma\dot{\lambda}^2}{4\lambda^2} + \ddot{\lambda}(\frac{\gamma}{4\lambda} + \frac{1}{4\gamma}))\frac{1}{\beta\lambda}$$

$$+(\frac{\ddot{\lambda}}{4\gamma\lambda} - \frac{\dot{\lambda}^2}{4\gamma\lambda^2})\frac{1}{\beta}, \tag{26}$$

Ishni qaytar (W_{rev}) va qaytmas (W_{irr}) qismlarning yig’indisi ko’rinishida yozib olamiz:

$$W = W_{rev} + W_{irr} \tag{27}$$

Bu yerda

$$W_{rev} = \frac{1}{2\beta}\ln\lambda\Big|_0^{T_{FF}} = \frac{1}{2\beta}\ln\frac{\lambda(T_{FF})}{\lambda_0} \tag{28}$$

va

$$W_{irr} = (\frac{\gamma}{8}\int_0^{T_{FF}}\frac{\ddot{\lambda}}{\lambda^2}dt + \frac{1}{4\gamma}\int_0^{T_{FF}}\frac{\ddot{\lambda}}{\lambda}dt)\frac{1}{\beta}. \tag{29}$$

Yuqoridagi (29) tenglamada integrallarni hisoblab uni quyidagi sodda ko’rinishda yozib olamiz:

$$W_{irr} = \frac{\gamma k_B T}{8\lambda(0)T_{FF}}Z_2(\xi) + \frac{k_B T}{4\gamma T_{FF}}Z_1(\xi), \tag{30}$$

bu yerda

$$Z_n(\xi) \equiv \xi\int_0^1 \frac{2\pi\sin(2\pi s)}{[1+\xi(s-\frac{1}{2\pi}\sin(2\pi s))]^n}ds. \tag{31}$$

Xuddi shunday tarzda ichki energiyani hisoblaymiz:

$$E(t) \equiv \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} H_{FF}\rho_{FF}dxdp$$
$$= (1+\dot{\lambda}(\frac{1}{2\gamma\lambda} + \frac{\gamma}{4\lambda^2}))\frac{1}{\beta}. \tag{32}$$

To’rtinchi bobda **“Tarmoqlangan strukturalardi Broun harakati dinamikasini modellashtirish”** sarlavhasi ostida, graflardagi Fokker-Plank tenglamasi asosida past o’lchamli tarmoqlangan strukturalardagi Broun zarrasining modeli taklif qilingan. Model garmonik ossilyator uchun yozilgan bir o'lchamli Fokker-Plank tenglamasiga asoslanadi:

$$\frac{\partial f}{\partial t} = \gamma\frac{\partial}{\partial x}(xf) + D\frac{\partial^2}{\partial x^2}f \tag{33}$$

Bu yerda $f(x,t)$ – ehtimollik zichligi (yoki taqsimot funksiyasi), γ- ishqalanish koeffitsiyenti и $D = const$ – diffuziya koeffitsiyenti.

Boshlang’ich shart quyidagicha berilgan

$$f(x,0) = \delta(x - x_0), \tag{34}$$

Fokker-Plank tenglamasining (33) cheksiz chiziqdagi yechimi quyidagicha ifodalanadi

$$f(x_0,x,t) = \sqrt{\frac{\gamma}{2\pi D(1-e^{-2\gamma t})}}\exp[-\frac{\gamma(x-e^{-\gamma t}x_0)^2}{2D(1-e^{-2\gamma t})}]. \tag{35}$$

Statsionar hol uchun ($\frac{\partial f}{\partial t} = 0$) yechim navbatdagi ifoda orqali beriladi

$$f = \sqrt{\frac{\gamma}{2\pi D}} \exp[-\frac{\gamma x^2}{2D}]. \qquad (36)$$

Fokker-Plank tenglamasining yechimi (35) ushbu saqlanish qonunini qanotlantiradi:

$$\frac{d}{dt}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,t)dx = 0. \qquad (37)$$

Bu yerda biz Fokker-Plank tenglamasini metrik graflarda qaraymiz, u past o'lchamli tarmoqlangan strukturalarda Broun harakatini tavsiflaydi. Oddiylik uchun uchta qirradan iborat yulduzsimon grafni ko'rib chiqing. Zarracha koordinatalarini x_j, Grafning har bir qirrasi e_j, uchun yozib olamiz. Bu yerda e_1 qirrani $x_1 \in (-\infty, 0]$ oraliqda, $e_{1,2}$ qirralarni esa $x_{2,3} \in [0, +\infty)$ oraliqda ko'rib chiqamiz.

Yulduzsimon metrik graf uchun Fokker-Plank tenglamasi quyidagicha yoziladi:

$$\frac{\partial f_j}{\partial t} = \gamma_j \frac{\partial}{\partial x}(x f_j) + D_j \frac{\partial^2}{\partial x^2} f_j, \quad j = 1,2,3. \qquad (38)$$

Bu yerda j –qirra raqami, D_j – har bir qirradagi diffuziya koeffitsiyenti, f_j – har bir qirradagi taqsiomot zichligi. Fokker plank tenglamasini (38) graflarda yechish uchun, grafning tuguniga chegaraviy shartlar qo'yish lozim. Bu yerda chegaraviy shartlarni yechimning vazni saqlanishi:

$$\sqrt{\frac{D_1}{\gamma_1}} f_1(0,t) = \sqrt{\frac{D_2}{\gamma_2}} f_2(0,t) = \sqrt{\frac{D_3}{\gamma_3}} f_3(0,t), \qquad (39)$$

va oqim shaqlanishi qonuni (Kirxgof qoidasi) ko'rinishida beramiz:

$$D_1 \frac{\partial f_1}{\partial x} = D_2 \frac{\partial f_2}{\partial x} + D_3 \frac{\partial f_3}{\partial x}. \qquad (40)$$

Boshlang'ich shartni quyidagicha yoziladi

$$f_j(x,0) = \delta(x - x_{0j}). \qquad (41)$$

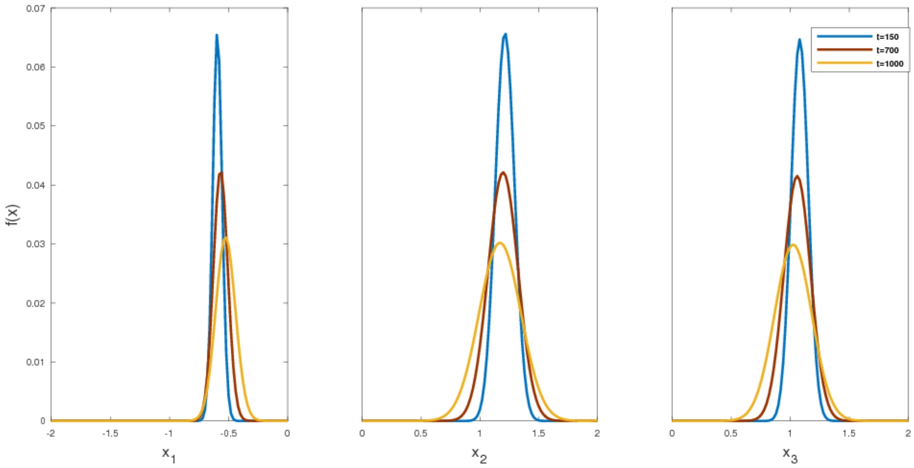
Bunday chegaraviy va boshlang'ich shartlar uchun (38) tenglamaning yechimini quyidagicha olamiz:

$$f_j(x_{0j}, x, t) = \sqrt{\frac{\gamma_j}{2\pi D_j(1-e^{-2\gamma_j t})}} \exp[-\frac{\gamma_j (x - e^{-\gamma_j t} x_{0j})^2}{2D_j(1-e^{-2\gamma_j t})}]. \qquad (42)$$

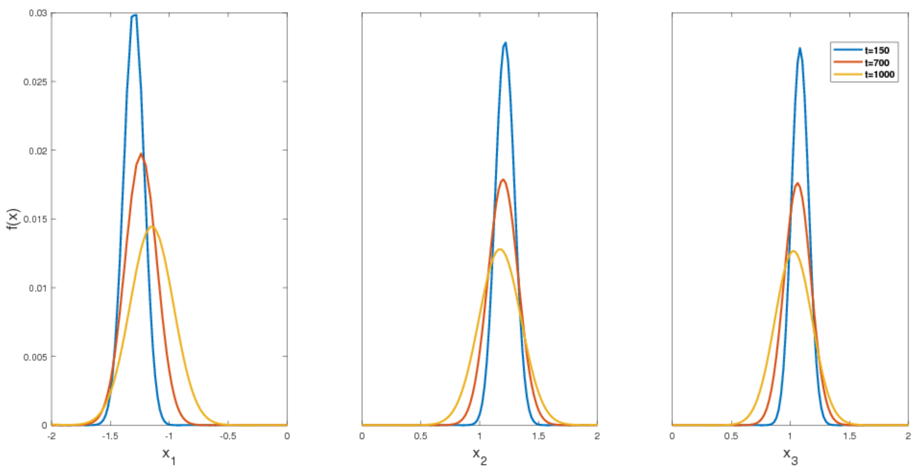
Bu yerda diffuziya koeffitsiyentlari quyidagi yig'indi qoidasini qanoatlantiradi:

$$\frac{1}{\sqrt{D_1}} = \frac{1}{\sqrt{D_2}} + \frac{1}{\sqrt{D_3}}, \qquad (43)$$

bu yerda $\gamma_1 = \gamma_2 = \gamma_3 = \gamma, x_{0j} = \pm\sqrt{D_j}$. Yulduzsimon graf uchun yozilgan (38) Fokker-Plank tenglamasini aniq yechimini olish uchun (43) tenglamada berilgan yig'indisi qoidasi zarur va yetarli shartdir. Diffuziya koeffitsiyentlari uchun yozilgan (43) yig'indi qoidasi bajarilgan hol uchun Fokker-Plank yechimlarinining har xil vaq oraliqlaridagi ($t = 150,\quad t = 700\quad$ и $t = 1000$) grafiklari 1-rasmda ko’rsatilgan,. Yig’indi qoidasi bajarilmagan hol uchun (38) tenglamaning yechimlari grafiklari esa 2-rasmda keltirilgan, bunday hol uchun (38) tenglama faqat sonli usullar orqali yechiladi, bu ishda (38) tenglamani sonli yechish uchun Crank-Nicolson diskretlash metodini qo’lladik. Ushbu grafiklarni solishtirib ularning o'rtasida sezilarli sifat va miqdoriy farqlarni kuzatish mumkin, 1-rasmda (yig’indi qoidasi bajarilgan hol) taqsimot zichligi amplitudasi 2-rasmdagi (yig’indi qoidasi bajarilmagan hol) taqsimot zichliklarining amplitudasidan ikki barobar katta



1-rasm. Quyidagi qiymatlar uchun yulduzsimon graf uchun (38) tenglamani (43) qoida bajarilgan holda analitik yechib olingan taqsimot funksiyasi $f(x)$: $x_{01} = 0.7$, $x_{01} = 0.3$, $x_{01} = 0.5$ $\gamma_1 = \gamma_2 = \gamma_3 = 1.5$ и $D_2 = 0.9$, $D_3 = 0.7$.



2-rasm Quyidagi qiymatlar uchun yulduzsimon graf uchun (38) tenglamani (43) qoida bajarilmagan holda sonli usulda yechib olingan taqsimot funksiyasi $f(x)$: $x_{01} = 0.7$, $x_{01} = 0.3$, $x_{01} = 0.5$ $\gamma_1 = \gamma_2 = \gamma_3 = 1.5$ и $D_2 = 0.9$, $D_3 = 0.7$.

XULOSA

Ushbu dissertatsiya ishi past o’lchamli sodda kvant tizimlarning va stoxastik jarayonlarining boshqariladigan adiabatik evolyutsiyasini ularning evolyutsiyasini tezlashtirish yoki sekinlashtirish yo‘li bilan matematik modellashtirish masalalarini yechishga bag‘ishlangan. Dissertatsiyada olib borilgan tadqiqotlar asosida quyidagi xulosalar keltirilgan:

1. Devorlari adiabatik harakatlanuvchi (sekin) kvant qutidagi kvant ideal gazining tezlashtirilgan evolyutsiyasi matematik modeli taklif qilindi. Bunday tizimning termodinamik xarakteristikalari hisoblandi;
2. Past o'lchamli tizimlarda diffuziya jarayonlarini tezlashtirishning matematik modeli taklif qilindi;
3. Past o’lchamli tizimlarda stoxastik issiqlik dvigatelining matematik modeli taklif qilindi;
4. Kengligi vaqtga bog'liq bo'lgan parabolik tuzoqdagi Broun zarrasining evolyutsiyasini tezlashtirish algoritmi ishlab chiqildi;
5. Evolyutsiyasi tezlashtirilgan stoxastik issiqlik dvigatelining termodinamik kattaliklari uchun analitik formulalar olindi;
6. Tarmoqlangan past o’lchamli strukturalarda Broun zarrasining matematik modeli taklif qilindi;
7. Fokker-Plank tenglamasining graflardagi analitik va sonli yechimlari olindi;
8. Metrik grafiklarda Fokker-Plank tenglamasining boshlang’ich chegaraviy masalalarini sonli yechish algoritmlari va dasturlar to’plami ishlab chiqildi..

НАУЧНЫЙ СОВЕТ DSc.03/31.03.2022.T/FM.10.04 ПО ПРИСУЖДЕНИЮ УЧЕНОЙ СТЕПЕНИ ПРИ ИНСТИТУТ ФУНДАМЕНТАЛЬНЫХ И ПРИКЛАДНЫХ ИССЛЕДОВАНИЙ НАЦИОНАЛЬНОГО ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКОГО УНИВЕРСИТЕТА «ТИИИМСХ»

НАЦИОНАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ УЗБЕКИСТАНА
МАТРАСУЛОВ ЖАСУРБЕК ДАВРОНБЕК ЎҒЛИ

МОДЕЛИРОВАНИЕ УПРАВЛЯЕМОЙ АДИАБАТИЧЕСКОЙ ЭВОЛЮЦИИ ПРОСТЫХ КВАНТОВЫХ СИСТЕМ И СТОХАСТИЧЕСКИХ ПРОЦЕССОВ В СИСТЕМАХ НИЗКОЙ РАЗМЕРНОСТИ

05.01.07 – Математическое моделирование. Численные методы и комплексы программ
(физико-математические науки)

АВТОРЕФЕРАТ PhD ДИССЕРТАЦИИ
ПО ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИМ НАУКАМ

ТАШКЕНТ-2024

Тема диссертации докторска философии (PhD) по физико-математическим наукам зарегистрирована в Высшей аттестационной комиссии при Кабинете Министров Республики Узбекистан за B2021.4.DSc/FM142.

Диссертация выполнена в Национальном Университете Узбекистана имени Мирзо Улугбека.

Автореферат диссертации на трех языках (узбекский, русский, английский (резюме)) размещен на веб-странице Научного совета (http://ik-fizmat.nuu.uz/) и информационно-образовательном портале «Ziyonet» (www.ziyonet.uz).

Научный рукводитель: **Юсупов Жамбул Руслонович**
доктор физико-математических наук

Официальные оппоненты:

Ведущая организация **Национальный Университет Узбекистана**

Защита диссертации состоится «____» _____________2024 года в ____ часов на заседании Научного совета DSc.27.06.2017.FM.01.02 при Национальном университете Узбекистана (Адрес: 100174, г. Ташкент, Алмазарский район, ул. Университетская, 4. Тел.: (+99871) 227-12-24, факс: (+99871) 246-53-21, e-mail: nauka@nuu.uz).

С диссертацией можно ознакомиться в Информационно-ресурсном центре Национального университета Узбекистана (зарегистрирована за №_____). (Адрес: 100174, г. Ташкент, Алмазарский район, ул. Университетская, 4. Тел.: (+99871) 246-02-24).

Автореферат диссертации разослан «____» _______________2024 года.
(протокол рассылки №____ от ____________ 2024 года).

ВВЕДЕНИЕ (аннотация PhD диссертации)

Актуальность и востребованность темы диссертации. Проводимые в мире за последнюю декаду интенсивные научные и практические исследования направлены на разработку методов управление и манипуляции квантовыми явлениями, имеющих перспективу применение в различные квантовые материалы и устройствах, составляющих основу современных квантовых технологий. Именно через внедрение подобных технологий ожидается значительные улучшении ресурсосбережения и миниатюризация современных механических, электронных, оптических, тепловых и других устройств, в нано- и квантовых технологий. Достижение подобной цели требует глубокого понимания механизмов фундаментальных процессов, происходящих в квантовом режиме позволяющих решить проблему управляемой эволюции квантовых явлений. А это, в свою очередь невозможно без разработки физически приемлимых и эффективных математических моделей квантовой эволюции вышеупомянутых процессов. Именно развитие и использование подобных моделей позволяют разработку квантовых материалов и приборов с заранее заданными свойствами. Одним из эффетивных способов манипулирование квантовыми процессами является так называемый метод ускоренной (замедленной) эволюции квантовой системы, ранее предложенный японскими учеными К. Накамура (K. Nakamura) и Ш. Масуда (S. Masuda). В связи с этим использование эффективных и реалистических моделей подобных.

В настоящее время в мире изучение ускоренной (замедленной) эволюции квантовой системы, описываемых уравнениями Шрёдингера в различных контекстах и в рамках множества подходов. Одним из таких направлений является кратчайший путь к адиабатичности (shortcuts to adiabaticity) в которой целью является быстрое достижение заданной цели с медленной эволюцией. Различные версии манипуляции адиабатической квантовой динамикой в квантовых системах низкой размерности были предложены рядом авторов за последние десять лет. Особый интерес в данном контексте представляет ускорение квантовой эволюции посредством динамического конфайнмента путем манипулирование параметрами нестационарных граничных условий в уравнении Шрёдингера. В таких системах надлежащая настройка параметров конфайнмента используется в качестве инструмента для манипулирование эволюцией квантовой системы.

В нашей стране особое внимание уделяется моделированию различных квантовых систем и процессов возникающих при изучении функциональных материалов низкой размерности, как в контексте теоретической физики, так и прикладной математики. В частности, особое место в данном направлении занимает разработка математических моделей на основе численных решений нестационарных квантово-механических волновых уравнений с различными потенциалами и граничными условиями, которые требуют использование высокоточных и стабильных методов дискретизации и численных алгоритмов. Проведение исследований на уровне международных стандартов по приоритетным направлениям «Функциональный анализ, алгебра, дифференциальные уравнения, математическая физика, математическое моделирование, вычислительная математика и дискретная математика, теория вероятностей и математическая статистика» является одним из основных задач деятельности ряда научных групп, кафедр и лабораторий вузов и академических НИИ республики. При обеспечение исполнения постановления важное значение имеет развитие теории аналитического и численного решения дифференциальных уравнений на графах.

Данное диссертационное исследование в определенной степени служит выполнению задач, предусмотренных Указами Президента Республики Узбекистан от 7 февраля 2017 года «О стратегии действий по дальнейшему развитию Республики Узбекистан», Постановлениями Президента Республики Узбекистан №ПП-2789 от 17 февраля 2017 года «О мерах по дальнейшему совершенствованию деятельности академии наук, организации, управления и финансирования научно-исследовательской деятельности», №ПП-2909 от 20 апреля 2017 года «О мерах по дальнейшему развитию системы высшего образования», №ПП-3682 от 27 апреля 2018 года «О мерах по дальнейшему совершенствованию системы практического внедрения инновационных идей, технологий и проектов», №ПП-4708 от 7 мая 2020 года «О мерах по повышению качества образования и развитию научных исследований в области математики», а также в других нормативно-правовых документах, принятых в данной сфере.

Соответствие исследования приоритетным направлениям развития науки и технологий в Республике. Данная диссертационная работа выполнена в соответствии с приоритетными направлениями развития науки и технологий Республики Узбекистан IV. «Математика, механика и информатика».

Обзор зарубежных научных исследований по теме диссертации[1].

Научные исследования, направленные на разработку способов управления эволюции квантовых систем и ускорения квантовых процессов, проводятся в ведущих научных центрах и высших образовательных учреждениях мира, в том числе, University of the Basque Country (Испания), University of Luxembourg (Люксембург), Hebrew University (Израиль), Newcastle University (Великобритания), University of Bengkulu (Индонезия), University of Maryland (США), Max Planck Institute for the Physics of Complex Systems (Германия), Национальный Университет Узбекистана (Узбекистан).

В мире при аналитическом и численном моделировании эволюции квантовых систем и манипулирования квантовой динамикой в системах низкой размерности по ряду приоритетных направлений проводятся интенсивные научно-практические исследовании, в том числе: изучение особенностей в ряде квантовых системах с целью разработки способов

[1] Обзор зарубежных научных исследований по теме диссертации составлен на основе следуюших источников: Universal Journal of Computional Mathematics, Journal of Physics, Physics Letters A, Physical Review A, Journal of Mathematical Physics, Advances in Applied Mathematics Journal of Differential Equations, http://www.springer.com/mathematics; http://www.sciencedirect.com/science/jrnlallbooks /sub/mathematics.

манипулирования эволюцией квантовых явлений, разработка методов ускорения или замедления квантовой эволюции (fast forward evolution), а также управляемого развития квантовых процессов.

В результате исследований, проведенных в мире по изучению квантовой эволюции в системах низкой размерности а также разработки методов ускорения или замедления динамики квантовых систем, описываемых с помощью нестационарного уравнения Шрёдингера, получены ряд научных результатов, в том числе: были разработаны основы математической теории ускорения или замедления квантовой эволюции, предложены ряд эффективных способов манипулирования квантовой эволюции на основе так называемого fast forward подхода (Osaka University), исследованы также методы манипулирования адиабатической эволюцией квантовых систем, основанные на так называемой short cuts to quantum evolution (University of the Basque Country), разработан также способ ускорения квантовой эволюции в релятивистских системах, описываемых с помощью нетсационарного уравнения Дирака (University of Maryland), изучались также методы ускорения адаибатических инвариантов в квантовых системах (University of Maryland) изучалась так называемые дифференциальных уравнений в частных производных на графах (Institute for Nuclear Physics of Czech Academy of Sciences), разработан метод манипулирования динамикой туннелирования в квантовых системах (Национальный Университет Узбекистана), исследованы методы манипулирование динамики стохастических тепловых машин (Национальный Университет Узбекистана), разработан метод манипуляции динамики спинов (University of Bengkulu).

Степень изученности проблемы. Понятие манипулирование эволюцией квантовых систем было введено в работах A. Emmanouilidou, M. Berry, S. Rice, M. Demirplak, K. Nakamura, S. Masuda и G. Muga. Однако, первое применение методов манипулировние эволюцией квантовых систем для квантовых адиабатических процессов (замедленных) восходит к работам K. Nakamura, S. Masuda, G. Muga, A. del Campo, X. Chen. Позже, Xi Chen, A. Ruschhaupt, S. Schmidt, A. del Campo, D. Guery-Odelin, J. G. Muga представили модель охлаждение атомов с применением кратчайшего пути к адиабатичности. K. Nakamura, A. Ходжакулов, S. Masuda, С. Авазбаев предложили методы ускорение процесса квантового туннелирование в обычных так и в адиабических режимах. S. Masuda, U. Güngördü, X. Chen, T. Ohmi, M. Nakahara разработали способы ускорение образование топологических вихрей в Бозе-Эйнштейнских конденсатах. Проблема ускорение стохастических тепловых машин впервые были рассмотрены K. Nakamura, Y. Izumida. Термодинамические свойства ускоренного динамического квантового конфайнмента были изучены K. Nakamura, Г. Бабажанова, A. del Campo, J. Goold, M. Paternostro. Схема ускорение классического адиабатического инварианта была предложено C. Jarzynski, S. Deffner, A. Patra, Y. Subasi. S. Deffner рассмотрел проблему ускорение динамики релятивистских квантовых процессов. Задачу ускорение спиновой динамики рассмотрели I. Setiawan, B. E. Gunara, S. Masuda, K. Nakamura.

Связь диссертационного исследования с планами научно-исследовательских работ высшего учебного заведения, где выполнена диссертация. Диссертационное исследование проводилось в рамках научно-исследовательского проекта ОТ-Ф4-30 « Исследование качественных свойств двойной нелинейной кросс системы под влиянием конвективного смещения, переменной плотности, источника или поглощения», согласно плана научно-исследовательских работ Национального университета Узбекистана.

Целью исследования являются моделирование ускоренной и замедленной адиабатической эволюции квантовых систем и применение предложенных моделей к проблеме квантовых тепловых двигателей. Другой целью исследования является моделирование управляемой эволюции стохастических систем.

Задачи исследования:

моделирование управляемой адибатической эволюции квантовых газов в квантовом ящике;

выявление условий для ускорения и замедления эволюции квантовых систем низкой размерности;

моделирование ускоренной адиабатической квантовой эволюции под динамическим конфайнментов;

построение математической модели стохастического теплового двигателя (stochastic heat engine);

моделирование динамики броуновской частицы в разветвленных структурах низкой размерности;

построение математической модели адиабатического кратчайшего пути (short cuts to adibaticity) для ускорения квантовой эволюции в системах низкой размерности.

Объект исследования – квантовые системы низкой размерности, квантовый идеальный газ под динамическим конфайнментом, стохастический тепловой двигатель, броуновская частица в разветвленных структурах.

Предмет исследования – разработка методов ускорения и замедления эволюции квантовых систем низкой размерности, управление адиабатической эволюцией систем под динамическим конфайнментом, разработка модели стохастического теплового двигателя (stochastic heat engine), контроль броуновского движения в разветвленных системах низкой размерности.

Методы исследования. В данной диссертации использованы методы аналитического и численного решения уравнений Шредингера, теплопроводности, Крамерса, а также уравнения Фоккера-Планка.

Научная новизна диссертационного исследования, следующая:

Предложен метод ускорения (замедления) эволюции квантовых систем низкой размерности при наличии динамического конфайнмента;

Получен явный вид «ускоряющего потенциала», позволяющая экспериментально реализовать процесс ускроения эволюции;

Предложена математическая модель стохастического теплового двигателя и способ управление его работы путем ускорения эволюции процесса его функционирование;

Предложена математическая модель управляемого броуновского движение сетеподобных системах низкой размерности;

Разработан способ ускорения теплового переноса в системах низкой размерности при наличии динамического конфайнмента;

Получены новые уравнение состояния для квантового идеального Ферми газа при наличии динамического конфайнмента;

Практические результаты исследования заключаются в следующем:

построены устойчивые разностные схемы для начально-краевых задач нестационарного уравнения Шрёдингера с зависящими от времени граничными условиями, а также уравнения Фоккера-Планка на метрических графах;

методы численного и аналитического решения уравнений Шредингера наличии динамического конфайнмента были использованы для моделирования ускоренной эволюции простейших квантовых систем низкой размерности и создания модели стохастического теплового двигателя.

Достоверность результатов исследований заключается в том, что прозрачные граничные условия для уравнений Шредингера и Дирака на графах, которые выведены в рамках концепции прозрачных граничных условий для дифференциальных уравнений в частных производных, становятся эквивалентными граничным условиям в виде непрерывности веса решения и обобщенному правилу Кирхгофа, что подтверждается путем численного моделирования транспорта квазичастиц на графе и их перехода через узлы. В численных методах была анализирована устойчивость решений и проведены оценки их точности. Полученные результаты тщательно проанализированы физически и обоснованы теоретически в соответствии с их реальными физическими процессами.

Научная и практическая значимость результатов исследования. Использованный в работе подход является достаточно универсальным и вносит свой вклад в теорию контролирования квантовой эволюции, а также и в физику квантового идеального газа.

Практическая значимость полученных результатов следует из возможности их применения в моделировании стохастических тепловых двигателей, как в классическом, так и в квантовом режимах, разработки способов ускорения и замедления эволюции простейших квантовых низкой размерности, а также моделировании броуновского движения в сетеподобных системах низкой размерности. Все эти проблемы имеют непосредтвенное отношение к квантовым технологиям и стохастической динамике.

Основные результаты:

1) Предложен способ ускорения адиабатической квантовой эволюции с системах низкой размерности;

2) Предложена математическая модель стохастического теплового двигателя, реализуемого в системах низкой размерности;
3) Предложен способ управляемой диффузии в системах низкой размерности;
4) Получено аналитическое решение уравнения Фоккера-Планка на метрических графах;
5) Предложена математическая модель броуновского движения в разветвленных структурах низкой размерности.

Внедрение результатов исследования. На основе научных результатов "Quantum gas in the fast forward scheme of adiabatically expanding cavities: Force and equation of state":

аналитическое выражение волновой функции использовалось в зарубежных научных работах (Philosophical Transactions of Royal Society A, Volume 380, 20210278, November 2022; Reviews of Modern Physics, Volume 91, 045001, October 2019; Physical Review A, Volume 99, 062116, June 2019; Physical Review E, Volume 102, 012129, July 2020; Applied Mathematics Letters, Volume 143, 108684, September 2023) для расчета таких физических ожидаемых величин, как квантовая сила, кинетическая энергия, внутренняя энергия. Применение научного результата позволило построить математическую модель перестройки адиабатического квантового идеального газа, заключенного в динамический конфайнемнте с твердыми и мягкими стенками;

На основе научных результатов "Fast-forward approach to stochastic heat engine":

Полученный в статье потенциал для ускорения изотермических и адиабатических процессов использованы в зарубежных научных работах (Frontiers in Physics, Volume 16, 33202, December 2021; Physical Review Letters, Volume 128, 230603, June 2022; Physical Review E, Volume 106, 054108, November 2022; Journal of Statistical Mechanics: Theory and Experiment, Volume 2020, 093207, September 2020; Physical Review E, Volume 106, 024105, August 2022; Physical Review E, Volume 106, 064117, December 2022; Physical Review Research, Volume 4, 023157, May 2022; The European Physical Journal Plus, Volume 137, 1011, September 2022; Physical Review E, Volume 103, 032146, March 2021; The European Physical Journal B, Volume 96, 22, February 2023; Reports on Progress in Physics, Volume 86, 035902, January 2023) изучить термодинамические характеристики стохастической тепловой машины.

По результатам научно-исследовательской работы получены два сертификата на программный продукт, «Моделирование случайных процессов с использованием уравнения Фоккера-Планка на метрических графах» (DGU 2022 2974, 23.05.2022) и «Программный комплекс для моделирования броуновского движения в сетях по методу Фоккера-Планка». уравнение» (№ DGU 20237477 от 18.10.2023) зарегистрированные Агентством интеллектуальной собственности при Министерстве юстиции Республики Узбекистан.

Апробация результатов исследования. Результаты исследований апробированы на 5 научно-практических конференциях, в том числе 1 республиканской и 4 международных конференциях, а также в научных семинарах института теоретической физики Дюссельдорфского университета имени Генриха Гейне и физического факультета университета Анкары.

Опубликованность результатов исследования. По теме диссертации опубликованы 5 научных статьей в международных научных журналах, 4 из которых входят в базу данных SCOPUS также опубликованы 2 тезиса в сборниках международных конференций.

Структура и объем диссертации. Структура диссертации состоит из введения, четырех глав, заключения, списка использованной литературы, и приложений. Объем диссертации составляет 110 страниц.

ОСНОВНОЕ СОДЕРЖАНИЕ ДИССЕРТИЦИИ

Во **введении** обосновывается актуальность и востребованность темы диссертации, в соответствии исследованиям приоритетных направлений развития науки и технологий Республики Узбекистан, формулируются цель и задачи, а также объект и предмет исследования, изложены научная новизна и практические результаты исследования, обоснована достоверность полученных результатов, раскрыты теоретическая и практическая значимость полученных результатов, приведены перечень внедрений в практику результатов исследования, сведения по опубликованным работам и структуре диссертации.

В первой главе, под названием **«Способы ускорения и замедления эволюции квантовых систем»,** изложены описание современного состояния проблемы управления квантовой эволюцией, обоснование актуальности задач диссертации, а также описание базовой теории ускорения и замедления эволюции в рамках уравнения Шредингера. В частности, были подробно представлены концепция «fast forward method».

Вторая глава, которая называется **«Ускоренная эволюция квантового газа в адиабатически-расширяющемся наноразмерной полости»**, посвящена моделированию ускоренной квантовой эволюции идального газа при наличии динамического конфайнмента. В ней, в частности, предложен алгоритм ускорения эволюции адиабатически меняющейся по времени квантовой системы.

В частности, предложена схема (метод) ускорения адиабатической квантовой эволюции идеального газа, находящегося в цилиндрической полости с движущимся клапаном. Полагая, что динамический конфайнмент в одномерной системе создается медленно меняющимся (по времени) потенциалом V_0 , который генерирует стационарное (мгновенное) квантовое состояние ψ_0, описываемое стационарным уравнением Шредингера. Эволюция системы в общем случае, то есть в течении длительного времени описывается с помощью нестационарного уравнения Шредингера.

В рамках такого подхода рассмотрим квантовую систему, находящуюся на “деформируемой” ловушке, создаваемой медленно меняющимся потенциалом, где деформация происходить в результате изменения параметра потенциала $R(t)$, адиабатическая эволюция которого задана с помощью соотношения

$$R(t) = R_0 + \epsilon t,$$

где $\epsilon \ll 1$, коэффициент роста, благодаря малости которого необходимо достаточно длительное время $T = O\left(\frac{1}{\epsilon}\right)$, чтобы видеть ощутимое изменение $R(t)$. Эволюция такой квантовой системы описывается с помощью нестационарного одномерного уравнения Шредингера, имеющий вид:

$$i\hbar \frac{\partial \psi_0}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m} \partial_x^2 \psi_0 + V_0(x, R(t))\psi_0,$$

где предполагается отсутствия взаимодействие с внешним электромагнитным полем. Тогда связанные состояния соответствующей стационарной системы описываются с помощью уравнения Шредингера, имеющий вид

$$E\phi_0 = \hat{H}_0\, \phi_0 \equiv \left[-\frac{\hbar^2}{2m} \partial_x^2 + V_0(x, R)\right] \phi_0.$$

Также, мы введем так называемое регуляризованное квантовое состояние, задаваемое выражением

$$\begin{aligned} \psi_0^{reg} \quad &\equiv \phi_0(x, R(t)) e^{i\epsilon\theta(x, R(t))} e^{-\frac{i}{\hbar}\int_0^t E(R(t\prime))dt\prime} \\ &\equiv \phi_0^{reg}(x, R(t)) e^{-\frac{i}{\hbar}\int_0^t E(R(t\prime))dt\prime} \end{aligned}$$

И соответствующий регуляризованный потенциал, определяемый как

$$V_0^{reg} \equiv V_0(x, R(t)) + \epsilon\, \widetilde{V}\,(x, R(t)).$$

Неизвестные величины θ и $\widetilde{V}$ могут быть найдены из того факта, что ψ_0^{reg} удовлетворяет нестационарному уравнению Шредингера:

$$i\hbar \frac{\partial \psi_0^{reg}}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m} \partial_x^2 \psi_0^{reg} + V_0^{reg} \psi_0^{reg},$$

С точностью до ϵ.

Представляя функцию $\phi_0(x, R(t))$ в виде, зависящей от вещественных амплитуды $\overline{\phi}_0(x, R(t))$ и фазы $\eta(x, R(t))$ в виде

$$\phi_0\big(x, R(t)\big) = \overline{\phi}_0\big(x, R(t)\big) e^{i\eta(x, R(t))}.$$

Для θ и $\tilde{V}$ имеем:

$$\partial_x(\overline{\phi}_0^2 \partial_x \theta) = -\frac{m}{\hbar} \partial_R \overline{\phi}_0^2,$$

$$\frac{\widetilde{V}}{\hbar} = -\partial_R \eta - \frac{\hbar}{m}\partial_x \eta \cdot \partial_x \theta.$$

Интегрируя первое уравнение по x, имеем

$$\partial_x \theta = -\frac{m}{\hbar}\frac{1}{\overline{\phi}_0^2}\int^x \partial_R\, \overline{\phi}_0^2 dx'.$$

Нашей задачей является ускорение эволюции адиабатической динамики квантового состояния ψ_0^{reg} путем воздействия внешним электромагнитным полем, для чего мы вводим ускоренную версию данного состояния в виде

$$\psi_{FF}^{(0)}(x,t) = \psi_0^{reg}\left(x, R\big(\Lambda(t)\big)\right) = \phi_0^{reg}(x, R(\Lambda(t)))e^{-\frac{i}{\hbar}\int_0^t E(R(\Lambda(t')))dt\prime}$$

где

$$R(\Lambda(t)) = R_0 + \epsilon\Lambda(t),$$

а величина $\Lambda(t)$определятся как

$$\Lambda(t) = \int_0^t \mathrm{\alpha}(\mathrm{t}')\ \mathrm{d}t',$$

Здесь $\alpha(t)$ – фактор увеличения масштаба, определяемый как $\alpha(0) = 1, \alpha(t) > 1\ (0 \le t \le T_{FF}),\ \alpha(t) = 1\ (t > T_{FF})$. Полагая, что T является очень длинным временем, позволяющим ощутимое изменение адиабатической величины $R(t)$, его зависимость от T_{FF} может быть определена как

$$T = \int_0^{T_{FF}} \alpha\,(t)\mathrm{d}t.$$

Явное выражение для $\alpha(t)$ в ускоряемом интервале времени $(0 \le t \le T_{FF})$ может быть записано как

$$\alpha(t) = \overline{\alpha} - (\overline{\alpha} - 1)\cos(\frac{2\pi}{T/\overline{\alpha}}t),$$

где $\overline{\alpha}$ –среднее значение $\alpha(t)$, определяемое как $\overline{\alpha} = T/T_{FF}$. Далее, мы будем полагать, что функция $\psi_{FF}^{(0)}$ является решением нестационарного уравнения Шредингера для заряженной частицы в поле потенциалов $A_{FF}^{(0)}(x,t)$ и $V_{FF}^{(0)}(x,t)$:

$$\imath\hbar\frac{\partial\psi_{FF}^{(0)}}{\partial t} = H_{FF}\psi_{FF}^{(0)} \equiv \left(\frac{1}{2m}(\frac{\hbar}{i}\partial_x - A_{FF}^{(0)})^2 + V_{FF}^{(0)} + V_0^{reg}\right)\psi_{FF}^{(0)},$$

где для простаты мы брали единичный заряд ($q = 1$) и единичную скорость света ($c = 1$). Тогда электрическое поле может быть записано как

$$E_{FF} = -\frac{\partial A_{FF}^{(0)}}{\partial t} - \partial_x V_{FF}^{(0)}.$$

Это приводит нас следующему уравнению Шредингера для ϕ_0^{reg}:

$$\begin{aligned} i\hbar\frac{\partial \phi_0^{reg}}{\partial t} &= \frac{1}{2m}\left(\frac{\hbar}{i}\partial_x - A_{FF}^{(0)}\right)^2 \phi_0^{reg} \\ &+ (V_{FF}^{(0)} + V_0^{reg} - E)\phi_0^{reg}, \end{aligned}$$

где $V_0^{reg} \equiv V^{reg}(x, R(\Lambda(t)))$

Представляя функцию ϕ_0^{reg} в терминах амплитуды $\overline{\phi}_0$ и фазы $\eta + \epsilon\theta$ как

$$\phi_0^{reg} \equiv \overline{\phi}_0(x, R(\Lambda(t)))e^{i[\eta(x,R(\Lambda(t)))+\epsilon\theta(x,R(\Lambda(t)))]},$$

мы получим для $\psi_{FF}^{(0)}$ следующее явное выражение:

$$\psi_{FF}^{(0)} = \overline{\phi}_0(x, R(\Lambda(t)))e^{i\eta(x,R(\Lambda(t)))}e^{-\frac{i}{\hbar}\int_0^t E(R(\Lambda(t')))dt'}.$$

Полученные выше результаты могут быть применены, например, к ускорению эволюции квантовой частицы в одномерном ящике (quantum box) с движущейся стенкой. Модель такой системы описывается с помощью следующего нестационарного уравнения Шреингера:

$$i\hbar\frac{\partial \psi}{\partial t} = H_0\psi = -\frac{\hbar^2}{2m}\partial_x^2\psi$$

где волновая функция удовлетворяет граничным условиям, заданных как $\psi(x = 0, t) = 0$ и $\psi(x = L(t), t) = 0. L(t)$ (изменение положение стенки будем считать адиабатическим, то есть $L(t) = L_0 + \epsilon t$, где $\epsilon -$ малая величина).

Собственные значения и собственные функции такой адиабатической квантовой системы имеют следующий вид:

$$E_n = \frac{\hbar^2}{2m}\left(\frac{\pi n}{L}\right)^2,$$

$$\phi_n = \sqrt{\frac{2}{L}}\sin\left(\frac{\pi n}{L}x\right).$$

Согласно вышеизложенному, для фазы регуляризованного состояния имеем:

$$\partial_x\theta = -\frac{m}{\hbar}\frac{1}{\phi_n^2}\partial_L\int_0^x \phi_n^2\,\mathrm{d}x = \frac{m}{\hbar}\frac{x}{L},$$

$$\theta = \frac{m}{2\hbar}\frac{x^2}{L}.$$

Применение вышеизложенного алгоритма ускорения квантовой эволюции адиабатической системы дает следующий результат для волновой функции ускоренной системы:

$$\psi_{FF} = \phi_n(x, L(\Lambda(t)))e^{i\frac{m\dot{L}}{2\hbar L}x^2}e^{-i\frac{\hbar}{2m}(\pi n)^2\int_0^t\frac{\mathrm{d}t\prime}{L^2(\Lambda(t\prime))}},$$

где $L(\Lambda(t)) = L_0 + \int_0^t v\,(t')\mathrm{d}t'$, а $v(t) = \overline{v}\left(1 - \cos\frac{2\pi}{T_{FF}}t\right)$. Для потенциала системы с ускоренной эволюцией, то есть для ускоряющего потенциала имеем

$$V_{FF} = -\frac{m}{2}\frac{\ddot{L}}{L}x^2,$$

что находится в согласии с результатами предыдущих исследований.

В третьей главе, под названием «Ускоренная эволюция стохастического теплового двигателя» предложена математическая модель управляемого функционаривания двигателя, работающего на основе принципа Карно. Примером подобного теполового двигателья, например, может служить так назваемый броуновский тепловой двигатель, который привлек значительный интерес в течении последней декады. В данной работе нами предложена математическая модель ускорение эволюции изотермального процесса в стохастическом тепловом двигателе, состоящей из броуновской частицы, взаимодействующей с гармоническим потенциалом и работающим между двумя тепловыми резервуарами высокой (T_h)- и низкой (T_c)-темперутуры.

Рассмотрим броуновскую частицу, контактирующую с резервуаром температуры $k_BT(=\frac{1}{\beta})$ и взаимодействующую расширяющимся (сжимаующимся) гармоническим потенциалом-ловушкой (т.е. с параболической ямой с переменной во времени шириной). Функция распределения вероятности $\rho_0(x, p, t)$ такой системы удовлетворяет уравнению Крамерса, который имеет вид

$$\frac{\partial\rho_0}{\partial t} + \frac{\partial J_x}{\partial x} + \frac{\partial J_p}{\partial p} = 0 \qquad (1)$$

С вектором потока вероятности (J_x, J_p), который определяется как

$$J_x = (\frac{\partial H_0}{\partial p} + \frac{1}{\beta}\frac{\partial}{\partial p})\rho_0,$$

$$J_p = -(\frac{\partial H_0}{\partial x} + \frac{1}{\beta}\frac{\partial}{\partial x})\rho_0$$

$$-\gamma(\frac{\partial H_0}{\partial p} + \frac{1}{\beta}\frac{\partial}{\partial p})\rho_0. \quad (2)$$

Здесь $H_0 = \frac{p^2}{2} + \frac{1}{2}\lambda x^2$ – гамильтониан (броуновской) частицы единичной массы в параболической ловушке, а λ – коэффициент жесткости, и γ-коэффициент трения, отвечающий за диссипацию. Используя последние две выражении, уравнению Крамерса можно записывать в виде

$$\frac{\partial \rho_0}{\partial t} = \{H_0, \rho_0\}$$

$$+\gamma\, \partial_p(\frac{\partial H_0}{\partial p}\rho_0 + \frac{1}{\beta}\partial_p\rho_0), \quad (3)$$

где $\{\cdots,\cdots\}$ – скобка Пуассона. Последний член в данном уравнении пропорционален $\frac{\gamma}{\beta}$ и связан с гауссовым (белым) шумом, возникающим в уравнении Ланжевена.

Для $\lambda = const.$, мы имеем равновесное гауссовое распределение ρ_0^{eq} при $t \to \infty$. Полагая для этого случая $\partial_t\rho_0 = 0$ уравнение Крамерса имеет решение в виде

$$\rho_0^{eq} = \frac{\beta\sqrt{\lambda}}{2\pi}\exp(-\beta H_0(\lambda)), \quad (4)$$

которое удовлетворяет условию нормировки, $\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\rho_0^{eq}(x,p)dxdp = 1$.

Рассмотрим случай, когда λ меняется по времени очень медленно, то есть квазистатически:

$$\lambda(t) \equiv \lambda_0 + \varepsilon t \quad (5)$$

где $|\varepsilon| \ll 1$, что означает, что требуется очень большой промежуток времени $T = O(\frac{1}{|\varepsilon|})$, для того, чтобы увидеть ощутимое изменение $\lambda(t)$.

Введем регуляризованную функцию распределения, $\rho_0^{reg}(x,p;\lambda(t))$, определяемую как

$$\rho_0^{reg} = \exp[-\beta H_0(\lambda(t)) - \Gamma(\lambda(t))] \quad (6)$$

где

$$H_0(\lambda(t)) \equiv \frac{p^2}{2} + \frac{\lambda(t)}{2}x^2,$$

$$\exp(-\Gamma(\lambda(t))) \equiv \frac{\beta\sqrt{\lambda(t)}}{2\pi}. \tag{7}$$

Добавляя потенциал εh в H_0 можем получит регуляризованную версию уравнения Крамерса:

$$\frac{\partial \rho_0^{reg}}{\partial t} = \{H_0 + \varepsilon h, \rho_0^{reg}\}$$
$$+\gamma\, \partial_p (p\rho_0^{reg} + \frac{1}{\beta}\partial_p \rho_0^{reg})$$
$$+\varepsilon\gamma\, \partial_p (\rho_0^{reg} \frac{\partial h}{\partial p}). \tag{8}$$

Здесь $h = h(x, p; \lambda)$ опрееляется таким оразом, что ρ_0^{reg}в (6) удовлетворяет уравнению (8).

Учитывая что, ρ_0^{reg} удовлетворяет уравнению

$$\partial_t \rho_0^{reg} = \frac{\partial \rho_0^{reg}}{\partial \lambda}\frac{d\lambda}{dt}$$
$$= \varepsilon[-\frac{\beta}{2}x^2 + \frac{1}{2\lambda}]\rho_0^{reg}, \tag{9}$$

И сравнивая обе стороны уравнения (8) (по одинаковому порядку ε) получим (с точностью до $O(1)$)

$$\{H_0, \rho_0^{reg}\} + \gamma\, \partial_p (p\rho_0^{reg} + \frac{1}{\beta}\partial_p \rho_0^{reg}) = 0. \tag{10}$$

Для параболической ловушки, с точность до из (8) имеем соотношение:

$$[-\frac{\beta}{2}x^2 + \frac{1}{2\lambda}]\rho_0^{reg} = \{h, \rho_0^{reg}\}$$
$$+\gamma\, \partial_p (\rho_0^{reg}\, \partial_p h), \tag{11}$$

которое определяет величину (функцию) h.Учитывая соотношения $\partial_p \rho_0^{reg} = -\beta p \rho_0^{reg}$ и $\partial_x \rho_0^{reg} = -\beta\lambda x \rho_0^{reg}$, уравнение (11) может быть переписано в виде

$$-\frac{\beta}{2}x^2 + \frac{1}{2\lambda} = +\beta[\lambda x\, \partial_p h - p\, \partial_x h]$$
$$-\gamma\beta p\, \partial_p h + \gamma\, \partial_{pp} h. \tag{12}$$

Уравнение (12) может быть решено полагая, что

$$h = ap^2 + bpx + cx^2. \tag{13}$$

Это приводит нас к следующей системе алгебраических уравнений:

$$b + 2\gamma a = 0,$$

$$\lambda b = -\frac{1}{2},$$

$$2\lambda a - 2c - \gamma b = 0,$$

$$\frac{1}{2\lambda} - 2\gamma a = 0. \qquad (14)$$

Решение данной системы может быть записано как $a = \frac{1}{4\gamma\lambda}$, $b = -\frac{1}{2\lambda}$, и $c = \frac{1}{4}(\frac{1}{\gamma} + \frac{\gamma}{\lambda})$. Поэтому для h имеем

$$h = \frac{1}{4\gamma\lambda}p^2 - \frac{1}{2\lambda}px + (\frac{1}{4\gamma} + \frac{\gamma}{4\lambda})x^2. \qquad (15)$$

Заметим, что полученный выше результат относится к первому приближению по ε , то есть не учитывает второй порядок ε^2.

Нашей задачей является ускорение (замедление) эволюции системы, описываемой уравнением (9). Одним из эффективных способов решение подобной задачи является замена переменной времени, (t) функцией $\Lambda(t)$, который является «ускоренным» временем. Вводя фактор масштабирования $\alpha(t) \gg 1$ функцию $(\Lambda(t))$ можем определить как

$$\Lambda(t) = \int_0^t \alpha(t')dt'. \qquad (16)$$

В интервале ускорения $(0 \leq t \leq T_{FF})$, функцию $\alpha(t)$ можно преставить в виде $\alpha(t) = 1 + (\bar{\alpha} - 1)f(s)$ где $s \equiv \frac{t}{T_{FF}}$. $\bar{\alpha}(> 1)$. Функция $f(s)(\geq 0)$ удовлетворяет граничным условиям $f(0) = f(1) = \dot{f}(0) = \dot{f}(1) = 0$ и $\bar{f} = \int_0^1 f(s')ds' = 1$. Из всех возможных явных видов функции $f(s)$, мы выбираем $1 - \cos(2\pi s)$. Тогда имеем

$$\alpha(t) = \bar{\alpha} - (\bar{\alpha} - 1)\cos(\frac{2\pi}{T_{FF}}t). \qquad (17)$$

Далее мы предполагаем, что зависимость от времени коэффициента жесткости λ имеет вид

$$\lambda(\Lambda(t)) = \lambda_0 + \varepsilon\Lambda(t). \qquad (18)$$

Тогда ускоренную функцию распределения ρ_{FF} можно представить в виде

$$\rho_{FF}(x, p, t) \equiv \rho_0^{reg}(x, p; \lambda(\Lambda(t)))$$

$$= \exp[-\beta H_0(\lambda(\Lambda(t))) - \Gamma(\lambda(\Lambda(t)))]. \tag{19}$$

Тогда ρ_{FF} удовлетворяет уравнению Крамерса, где коэффициент жесткости зависит от времени, а функции H_0, h заменены величинами $\varepsilon\alpha$ и $\lambda(\Lambda(t))$, соответственно:

$$\frac{\partial\rho_{FF}}{\partial t} = \frac{\partial\lambda}{\partial t}\frac{\partial\rho_{FF}}{\partial\lambda} = \varepsilon\alpha\frac{\partial\rho_{FF}}{\partial\lambda}$$
$$= \varepsilon\alpha\{h, \rho_0^{reg}\} + \gamma\varepsilon\alpha\,\partial_p(\rho_0^{reg}\,\partial_p h),$$

В пределе $\lim_{\varepsilon\to 0,\bar{\alpha}\to\infty}\varepsilon\bar{\alpha} = \bar{v}$, где $\bar{v} > 0$ ($\bar{v} < 0$) для $\varepsilon \to +0$ ($\varepsilon \to -0$), для уравнения Крамерса мы имее:

$$\frac{\partial\rho_{FF}}{\partial t} = \{H_0 + v(t)h, \rho_{FF}\}$$
$$+\gamma\,\partial_p(p\rho_{FF} + \frac{1}{\beta}\partial_p\rho_{FF})$$
$$+\gamma\,\partial_p(\rho_{FF}\,\frac{\partial(v(t)h)}{\partial p}). \tag{20}$$

Где $v(t)$ – скорость, которая выражается через функцию $\alpha(t)$ как

$$v(t) = \lim_{\varepsilon\to 0,\bar{\alpha}\to\infty}\varepsilon\alpha(t) = \bar{v}\left(1 - \cos\left(\frac{2\pi}{T_{FF}}t\right)\right). \tag{21}$$

Таким образом для $0 \le t \le T_{FF}$, имеем:

$$\lambda(\Lambda(t)) = \lambda_0 + \lim_{\varepsilon\to 0,\bar{\alpha}\to\infty}\varepsilon\Lambda(t) = \lambda_0 + \int_0^t v(t')dt'$$
$$= \lambda_0 + \bar{v}T_{FF}\left[\frac{t}{T_{FF}} - \frac{1}{2\pi}\sin\left(\frac{2\pi}{T_{FF}}t\right)\right].$$

Учитывая соотношения

$$\lambda(0) = \lambda_0, \quad \lambda(T_{FF}) = \lambda_0 + \bar{v}T_{FF} \tag{22}$$

и

$$\dot{\lambda}(0) = \dot{\lambda}(T_{FF}) = 0, \tag{23}$$

для ускоренного гамильтониана броуновской частицы имеем:

$$H_{FF}(x, p, t) = H_0 + \dot{\lambda}h, \tag{24}$$

где H_0 и h определятся уравнениями (7) и (15).

С помощью гамильтониана в (27) и ускоренной функции распределения ρ_{FF} , заданного уравнением (19), мы можем вычислить соответствующие, то есть ускоренные термодинамические величины, такие как работа W, количество теплоты Q, и изотермальную энергию E. Среднее значение работы можно определить как

$$W = \int_0^{T_{FF}} dt\langle\frac{\partial H_{FF}}{\partial t}\rangle. \tag{25}$$

Имея в виду соотношение

$$\begin{aligned}\langle\frac{\partial H_{FF}}{\partial t}\rangle &= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\partial H_{FF}}{\partial t}\rho_{FF}dxdp \\ &= (\frac{\dot{\lambda}}{2} - \frac{\gamma\dot{\lambda}^2}{4\lambda^2} + \ddot{\lambda}(\frac{\gamma}{4\lambda} + \frac{1}{4\gamma}))\frac{1}{\beta\lambda} \\ &\quad +(\frac{\ddot{\lambda}}{4\gamma\lambda} - \frac{\dot{\lambda}^2}{4\gamma\lambda^2})\frac{1}{\beta},\end{aligned} \tag{26}$$

работу можно представить как сумму обратимых (W_{rev}) и необратимых (W_{irr}) частей:

$$W = W_{rev} + W_{irr} \tag{27}$$

где

$$W_{rev} = \frac{1}{2\beta}\ln\lambda|_0^{T_{FF}} = \frac{1}{2\beta}\ln\frac{\lambda(T_{FF})}{\lambda_0} \tag{28}$$

и

$$W_{irr} = (\frac{\gamma}{8}\int_0^{T_{FF}}\frac{\ddot{\lambda}}{\lambda^2}dt + \frac{1}{4\gamma}\int_0^{T_{FF}}\frac{\ddot{\lambda}}{\lambda}dt)\frac{1}{\beta}. \tag{29}$$

После некоторых вычисление выражение для необратимой части работы в уравнении (32) можно упростить и записать в виде

$$W_{irr} = \frac{\gamma k_B T}{8\lambda(0)T_{FF}}Z_2(\xi) + \frac{k_B T}{4\gamma T_{FF}}Z_1(\xi), \tag{30}$$

где

$$Z_n(\xi) \equiv \xi\int_0^1 \frac{2\pi\sin(2\pi s)}{[1+\xi(s-\frac{1}{2\pi}\sin(2\pi s))]^n}ds. \tag{31}$$

Аналогично, для внутренней энергии имеем:

$$\begin{aligned}E(t) &\equiv \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}H_{FF}\rho_{FF}dxdp \\ &= (1 + \dot{\lambda}(\frac{1}{2\gamma\lambda} + \frac{\gamma}{4\lambda^2}))\frac{1}{\beta}.\end{aligned} \tag{32}$$

В четвертой главе, под наванием «моделировнаие динамики броуновского движения в разветвеленных структурах» в основе уравнения Фоккера-Планка на графах предложена математическая модель броуновской частицы в разветвленных структурах низкой размерности.

В качесве основы модели взята одномерное уравнение Фоккера-Планка с потенциалом гармонического осциллятора, которое имеет вид

$$\frac{\partial f}{\partial t} = \gamma \frac{\partial}{\partial x}(xf) + D\frac{\partial^2}{\partial x^2}f, \qquad (33)$$

где $f(x,t)$ - плотность вероятности (или функкия распределения), γ-коэффициент трения и $D = const$ – коэфффициант диффузии, которые, далее, для простоты будет рассмотрена как постоянная вличина.

Для начального усовия, имеющего вид

$$f(x,0) = \delta(x - x_0), \qquad (34)$$

решение уравнения (33) имеет вид

$$f(x_0,x,t) = \sqrt{\frac{\gamma}{2\pi D(1-e^{-2\gamma t})}}\exp[-\frac{\gamma(x-e^{-\gamma t}x_0)^2}{2D(1-e^{-2\gamma t})}]. \qquad (35)$$

Решение для стационарного случая ($\frac{\partial f}{\partial t} = 0$) имеет вид

$$f = \sqrt{\frac{\gamma}{2\pi D}}\exp[-\frac{\gamma x^2}{2D}]. \qquad (36)$$

Заметим, что данное уравнение Фоккера-Планка воспроизводить следующий закон сохранения:

$$\frac{d}{dt}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,t)dx = 0. \qquad (37)$$

Здесь мы рассмотрим уравнение Фоккера-Планка на метрическом графе, которое описывает броуновское движение в разветвеленной структуре низкой размерности. Для простоты рассмотрим звездообразный граф, состоящий из трех ребер. На каждом ребре графа e_j, введем ккоринату x_j, частицы в данном ребре. Координату на ребре e_1 рассмотрим в интервале $x_1 \in (-\infty, 0]$, а координаты на ребрах $e_{1,2}$ в интервале $x_{2,3} \in [0, +\infty)$. Далее, будем использовать обозначению $f_j(x)$ для функции $f_j(x_j)$ понимая при этом, что x означает координату на ребре j. Уравнение Фоккера-Планка на таком графе можно записать как

$$\frac{\partial f_j}{\partial t} = \gamma_j \frac{\partial}{\partial x}(xf_j) + D_j\frac{\partial^2}{\partial x^2}f_j, \quad j = 1,2,3. \qquad (38)$$

где j –номер ребра, D_j – коэффициент диффузии для j –го ребра, а f_j – плотность вероятнсти на j –м ребре. Для решения уравения (38) необходимо также накладывать граничные условия на узле графа. Здесь мы будем накладывать и в виде непрерывности решения на узле:

$$\sqrt{\frac{D_1}{\gamma_1}}f_1(0,t) = \sqrt{\frac{D_2}{\gamma_2}}f_2(0,t) = \sqrt{\frac{D_3}{\gamma_3}}f_3(0,t), \tag{39}$$

и в виде сохранения потока (правила Кирхгофа):

$$D_1\frac{\partial f_1}{\partial x} = D_2\frac{\partial f_2}{\partial x} + D_3\frac{\partial f_3}{\partial x}. \tag{40}$$

Также будем накладывать начальную условию в виде

$$f_j(x,0) = \delta(x - x_{0j}). \tag{41}$$

Для таких граничных и начальных условий решение уравнения (38) имеет вид

$$f_j(x_{0j},x,t) = \sqrt{\frac{\gamma_j}{2\pi D_j(1-e^{-2\gamma_j t})}}\exp[-\frac{\gamma_j(x-e^{-\gamma_j t}x_{0j})^2}{2D_j(1-e^{-2\gamma_j t})}]. \tag{42}$$

Здесь коэффициенты диффузии удовлетворяют следущеюму правилу сумм:

$$\frac{1}{\sqrt{D_1}} = \frac{1}{\sqrt{D_2}} + \frac{1}{\sqrt{D_3}}, \tag{43}$$

где $\gamma_1 = \gamma_2 = \gamma_3 = \gamma, x_{0j} = \pm\sqrt{D_j}$. Правило сумм (43) является необходимым и достаточным условием для того, чтобы функция задданое в (43) удовлетворяло уравнения Фоккера-Планка (38) на звездооразном графе. На Рис. 1 представлены графики решений уравнения (38) в различных моментов времени, ($t = 150,\;\; t = 700$ и $t = 1000$), для случая, когда коэффициенты диффузии удовлетворяют условию (12). Рис. 2 представляет собой аналогичные графики для случая, когда условие в (43) не выполняются. Для такого случае уравнение (38) может быть решено только численно, для чего мы используем метод дискретизации Кранка-Никольсона (Crank-Nicolson). Можно наблюдать существенные качественные и количественные различие между графиками на данных рисунках.

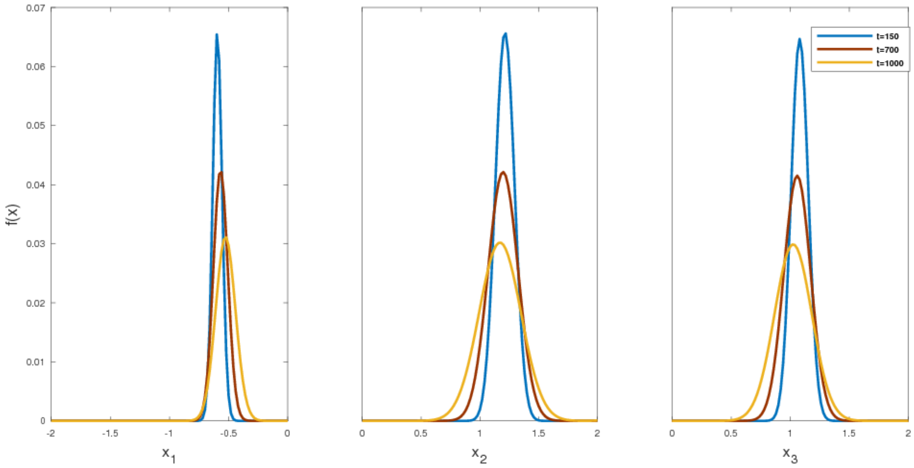


Рис. 1 : Плотность распределение, $f(x)$ для звездооразного графа, полученный путём решение уравнение (38) при выполнении правила сумм (43), с $x_{01} = 0.7$, $x_{01} = 0.3$, $x_{01} = 0.5$ $\gamma_1 = \gamma_2 = \gamma_3 = 1.5$ и $D_2 = 0.9$, $D_3 = 0.7$.

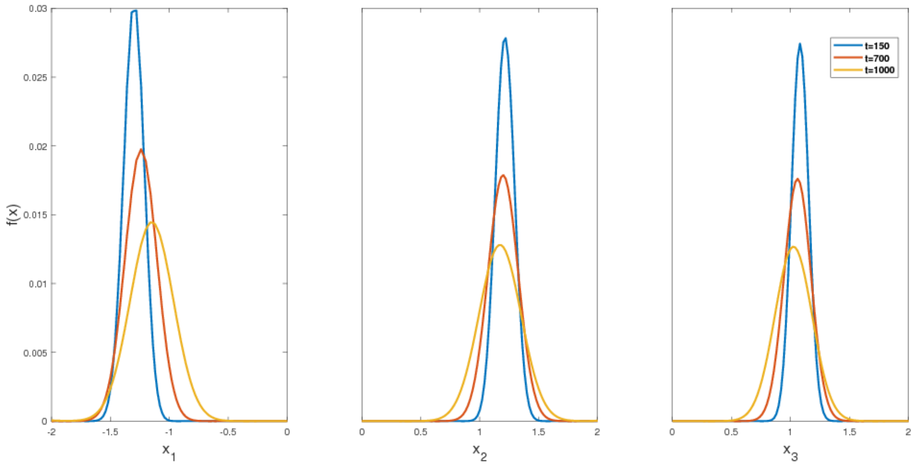


Рис. 2: Плотность распределение, $f(x)$ для звездообразного графа, полученный путём рещение уравнение (38) при нарушении правила сумм (43), с $x_{01} = 0.7$, $x_{01} = 0.3$, $x_{01} = 0.5$ $\gamma_1 = \gamma_2 = \gamma_3 = 1.5$ и $D_1 = 0.5$ $D_2 = 0.9$, $D_3 = 0.7$.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Данная диссертационная работа посвящена решению проблем математического моделирования управляемой адиабатической квантовой эволюции и стохастических процессов простейших систем низкой размерности путем ускорения или замедления их эволюции. На основе проведенных в диссертационной работе исследований представлены следующие выводы:

1. Предложена математическая модель ускоренной эволюции квантового идеального газа в квантовом ящике с адиабатически движущимися стенками. Расчитаны термодинамические характеристики такой системы;
2. Предложена математическая модель модель ускорения дифузионных процессов в системаъ низкой размерности при наличии динамического конфайнмента;
3. Предложена математическая модель стохастического теплового двигателя в системах низкой размерности;
4. Разработан алгоритм ускорения эволюции броуновской частицы в параболической ловушке с зависящими от времени шириной;
5. Получены аналитические формулы для термодинамических величин теплового двигателя с ускоренной эволюцией;
6. Предложена математическая модель броуновской частицы в разветвленных структурах низкой размерности;
7. Получены аналитические и численные решения уравнения Фоккера-Планка на графах;
8. Разработаны алгоритмы и комплекс программ для численного решения начально-краевых задач для уравнения Фоккера-Планка на метрических графах.

INTRODUCTION (abstract of a PhD dissertation)

The aim of the research. The purpose of this dissertation work is to model accelerated and decelerated adabatic evolution of quantum systems and application the proposed models to the problem of quantum heat engines. Another goal of the work is to model the tunable evolution of stochastic systems.

The object of the research. low-dimensional quantum systems, quantum ideal gas under dynamical confinement, stochastic heat engine, Brownian particle in low-dimensoinal branched structures.

The scientific novelty of the research is as follows:

Proposed method for accelerating (decelerating) the evolution of low-dimensional quantum systems in the presence of dynamic confinement;

Obtained an explicit form of the “accelerating potential”, which makes it possible to experimentally realize the process of accelerating evolution;

Proposed a model of a stochastic heat engine and a method for controlling its operation by accelerating the evolution of the process of its functioning;

Proposed a model of tunable Brownian motion in low-dimensional network-like systems;

Developed scheme for acceleration of heat transfer in low-dimensional systems in the presence of dynamical confinement;

Obtained new equations of state for a quantum ideal Fermi gas in the presence of dynamical confinement;

Implementation of the research results. Based on scientific results of “Quantum gas in the fast forward scheme of adiabatically expanding cavities: Force and equation of state”:

analytical expression of the wave function has been used in foreign scientific papers (Philosophical Transactions of Royal Society A, Volume 380, 20210278, November 2022; Reviews of Modern Physics, Volume 91, 045001, October 2019; Physical Review A, Volume 99, 062116, June 2019; Physical Review E, Volume 102, 012129, July 2020; Applied Mathematics Letters, Volume 143, 108684, September 2023) in order to calculate such physical expected quantities as quantum force, kinetic energy, internal energy. The application of the scientific result allowed us to construct the model of tunable of an adiabatic quantum ideal gas trapped in hard wall and soft wall confinements;

Based on scientific results of “Fast-forward approach to stochastic heat engine”:

fast-forward potential for isothermal and adiabatic processes obtained in paper are useed foreign scientific papers (Frontiers in Physics, Volume 16, 33202, December 2021; Physical Review Letters, Volume 128, 230603, June 2022; Physical Review E, Volume 106, 054108, November 2022; Journal of Statistical Mechanics: Theory and Experiment, Volume 2020, 093207, September 2020; Physical Review E, Volume 106, 024105, August 2022; Physical Review E, Volume 106, 064117, December 2022; Physical Review Research, Volume 4, 023157, May 2022; The European Physical Journal Plus, Volume 137, 1011, September 2022; Physical Review E, Volume 103, 032146, March 2021; The European Physical

Journal B, Volume 96, 22, February 2023; Reports on Progress in Physics, Volume 86, 035902, January 2023) to study thermodynamic characteristics of stochastic heat engine.

based on the results of research work, certificates were obtained " Modeling of stochastic processes using the Fokker-Planck equation on metric graphs" (DGU 2022 2974, 23.05.2022) and " A software package for modeling Brownian motion in networks via Fokker-Planck equation" (№ DGU 20237477, 18.10.2023) based on the Law of the Republic of Uzbekistan "On the Legal Protection of Software of Electronic Computing Machines and Databases".

Structure and volume of the dissertation. The structure of the dissertation consists of an introduction, four chapters, a conclusion, a list of references, and appendices. The volume of the thesis is 110 pages.

E’LON QILINGAN ISHLAR RO’YXATI

LIST OF PUBLISHED WORKS

СПИСОК ОПУБЛИКОВАННЫХ РАБОТ

I bo’lim (Part I; Часть I)

1. G. Babajanova, J. Matrasulov, K. Nakamura, Quantum gas in the fast forward scheme of adiabatically expanding cavities: Force and equation of state // Physical Review E, **97**, 042104, 2018 (Web of Science, Scopus, IF=2.7).
2. K. Nakamura, J. Matrasulov, Y. Izumida, Fast-forward approach to stochastic heat engine // Physical Review E, **102,** 012129, 2020 (Web of Science, Scopus, IF=2.7).
3. J. Matrasulov, K. Sabirov, Fokker–Planck equation on metric graphs // Physica A: Statistical Mechanics and its Applications, **608**, 128279, 2022 (Web of Science, Scopus, IF=3.7).
4. J. Matrasulov, J. Yusupov, A. Saidov, Fast forward evolution in heat equation: Tunable heat transport in adiabatic regime // Nanosystems: Physics, Chemistry, Mathematics, **14**, 421, 2023 (Web of Science, Scopus, IF=1.13).
5. D. Syafitri, A. Dari, I. Setiawan, J. Matrasulov, Introduction of Quantum System, Step Potential and Barrier Potential to Class X Students of SMA Budi Utomo Bengkulu City // Jurnal Pengabdian Kepada Masyarakat, **2**, 1–7, (2024) (IF=0.75).

II bo’lim (Part II; Часть II)

6. J. Matrasulov, J. Yusupov, Classical and quantum dynamics of relativistic two-dimensional atom in graphene interacting with constant uniform magnetic field // The 8th international conference on superconductivity and magnetism, Ölüdeniz-Fethiye, Turkey, P. 344
7. J. Matrasulov, O. Karpova, I. Ibragimov, Brownian motion n networks: metric graph approach // Сборник материалов конференции “Физика ва электроникaнинг долзарб муаммолари” Ташкентский государственный технический университет, 2023 г.

Бичими: 84x60 $^{1}/_{16}$. «Times New Roman» гарнитураси.
Рақамли босма усулда босилди.
Шартли босма табоғи: 3. Адади 100. Буюртма № 65/21.

Гувоҳнома № 851684.
«Tipograff» МЧЖ босмахонасида чоп этилган.
Босмахона манзили: 100011, Тошкент ш., Беруний кўчаси, 83-уй.